Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Ad Bibliothecam
Canoniæ SS. Apoſt. Petri & Pauli
in Weyarn
comparavit
P. VALENTINUS HANSCH Conventualis ibid.

TITULUS SCRINII.	SERIES.	NUMERUS.
		77

Math. u. 77-11

Digitized by Google

<36601373580013

<36601373580013

Bayer. Staatsbibliothek

Digitized by Google

Math. Mon. 77/1, 1

Matheſi. Syſtemata & methodi

127.

R

Digitized by Google

Anfangsgründe der Arithmetik Geometrie ebenen und sphärischen Trigonometrie, und Perspectiv.

Abgefaßt von

Abraham Gotthelf Käſtner

Königl. Großbritann. Hofrathe; Profeſſor der Mathem. und Naturl. der Gött. Kön. Geſ. der Wiſſenſch. der Kön. Churf. Braunſchw. Lüneb. Landwirthſchaftsgeſellſch. der Kön. Schwed. und Preuſſ. Akad. der Wiſſ. der Erfurtiſchen Churfürſtl. Geſ. nützl. Wiſſ. der bononiſchen Akad. der Wiſſ. der perufiniſchen Academiae Auguſtae der Oberlauſitziſchen Bienengeſellſchaft Mitgliede; der Kön. Götting. deutſchen Geſ. Aelteſten, Mitgliede der Leipziger deutſchen Geſellſchaft, und daſigen Geſellſch. der freyen Künſte, der Halliſchen naturforſchenden Geſellſchaft, der Jenaiſchen latein. und deutſchen Geſellſchaft, der Carlsruher lateiniſchen Geſellſchaft.

Der mathem. Anfangsgr. Iſten Theils erſte Abtheil.

Vierte vermehrte Auflage.

Göttingen
im Verlag der Wittwe Vandenhoek 1786.

Digitized by Google

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Digitized by Google

Dem

Hochgebohrnen Freyherrn

Herrn

Gerlach Adolph von Münchhausen,

Königlich = Groß = Britannischen

und Chur = Braunschweig = Lüneburgischen

Hochbetrauten

würklichen Geheimen Rath

und

Cammer = Präsidenten,

wie auch

der Georg = August = Universität

Höchstansehnlichen und Höchstverdienten

Curatoren

Erbherrn auf Strausfurth ꝛc.

Meinem gnädigsten Herrn.

Digitized by Google

Digitized by Google

Hochgebohrner Freyherr
Gnädigster Herr

Ew. Hochfreyh. Excellenz habe durch gegenwärtiges Werk Rechenschaft abzulegen, wie ich einem Theile des mir gnädigst anvertrauten Lehramtes genug zu thun bemüht bin. Ich hoffe, die Wahrheiten, welche den Inhalt dieses Buches ausmachen, vollständiger, gründlicher und brauchbarer vorgetragen zu haben, als insgemein zu geschehen pfleget. Der gnädige und einsichtsvolle Schutz, den Ew. Hochfreyherrl. Excellenz den Wissenschaften gönnen, verbindet jeden Lehrer, sich nach einem solchen Vortrage desjenigen, das ihn beschäfftiget, zu bestreben, und macht die Lernenden eifrig sich

Digitized by Google

von andern durch vollkommenere Kenntnisse zu unterscheiden.

Unter den eifrigsten Wünschen für Ew. Excellenz hohes Wohlergehen verharre mit tiefster Ehrfurcht

Hochgebohrner Freyherr,
Gnädigster Herr,
Ew. Hochfreyherrl. Excellenz

Göttingen
den 3. September
1758.

unterthänigstgehorsamster
Abraham Gotthelf Kästner.

Digitized by Google

Vorrede

der ersten Auflage.

Meine Absicht ist, durch gegenwärtiges Werk etwas zu Ausbreitung einer solchen Kenntniß der Mathematik beyzutragen, die dadurch erstlich recht brauchbar wird, daß sie gründlich und vollständig ist. Wenn man die Mathematik zu Schärfung des Verstandes treiben will, so kann man sich nicht begnügen, Sätze als bewiesen anzunehmen, für die nur unzulängliche und zum Theil gar unrichtige Schlüsse vorgebracht sind; So verhält es sich in den meisten geometrischen Anfangsgründen, mit den Lehren von den Parallellinien, der Ausmessung der Körper u. d. gl. Niemand aber kann in der angewandten Mathematik, und in den Künsten und Wissenschaften, wo es auf Berechnungen und Abmessungen ankömmt, die gehörige Geschicklichkeit erlangen, dem es an einer Fertigkeit in der Decimalrechnung, an verschiedenen merkwürdigen Lehren von den Verhältnissen und Proportionen, an einer Einsicht in die eigentliche Beschaffenheit und den Ursprung der Logarithmen fehlt, der von der Art, die Lagen unterschiedener Ebenen gegen einander zu bestimmen, den darauf be-

Digitized by Google

ruhenden Beschaffenheiten der Körper, und den Kreisen auf der Kugelfläche, nicht die gehörigen Begriffe hat. Ich geschweige der Buchstabenrechnung, ohne die niemand jetzo sich ein wenig über die gemeinste Kenntniß jedes Anfängers erheben kann.

Daß die meisten Lehrlinge der Mathematik in Deutschland von allen nur genannten Dingen, bey ihrer gewöhnlichen Anführung nichts gefasst haben, erhellet zulänglich daraus, weil das Wolfische Lehrbuch nichts davon enthält, das fast ein halbes Jahrhundert (*) beym Unterrichte in der Mathematik ist gebraucht worden, ohne von der grossen Menge neuerer Einleitungen verdrängt zu werden, die auch in der That meistens viel schlechter sind.

An diesem Buche muß man dergleichen Mängel entschuldigen, wenn man nur mittelmässige Billigkeit besitzet. Sein Verfasser suchte zuerst nach dem Anfange, den der ältere Sturm gemacht hatte, die Mathematik unter den Deutschen auszubreiten, und er durfte also von einer Wissenschaft, die dem gemeinen Haufen der deutschen Studenten und Professoren kaum dem Nahmen nach bekannt war, nur wenig, und nur das leichteste vortragen. Denn die meisten deutschen Gelehrten, und vorzüglich

(*) Die erste Aufl. der Anfangsgr. kam 1710. heraus.

Digitized by Google

lich diejenigen, nach deren Rathe junge Leute ihren akademischen Fleiß einrichten sollen, waren berühmter wegen ihrer Arbeitsamkeit, Folianten aus Folianten zusammenzuschreiben, als wegen der Aufmerksamkeit, eine kurze Reihe vernünftiger Schlüsse im Zusammenhange zu überdenken.

Deutschland wird den Freyherrn von Wolf noch mit Hochachtung nennen, wenn die Nahmen der meisten seiner Verächter nur noch in den Insectenverzeichnissen dauren werden, die der Fleiß deutscher Litteratoren sammlet. Es hat ihm für die Ausbreitung der Vernunft, und der Mathematik, die einen so grossen Theil der Vernunft ausmacht, sehr vieles zu danken. Man verfährt also ohne Zweifel selbst seinen Absichten gemäß, wenn man sich des durch ihn allgemeiner gemachten Geschmackes an der Mathematik bedienet, ihre Anfangsgründe vollkommener zu lehren, als er es wagen wollte, und Lehrlinge so weit zu führen, daß sie ihre Kenntniß durch eigenen Fleiß erweitern und anwenden können. Ich halte es für meine Schuldigkeit, einigermassen anzuzeigen, wie ich dieses hie zu bewerkstelligen gesucht habe. Man wird mir diese Erzählung nicht als eine Eitelkeit anrechnen. Sie soll nur zu meiner Rechtfertigung dienen, warum ich die Menge der mathematischen Einleitungen vermehre, nach-

Digitized by Google

dem ich bey meinen Vorlesungen zwanzig Jahre lang das Wolfische Handbuch gebraucht habe. Ich kann Kennern der Wissenschaft nicht zumuthen, daß sie diese Anfangsgründe durchlesen sollen, um etwa die Stellen zu finden, denen ich ihren Beyfall wünschte.

Alle Begriffe der Arithmetik gründen sich meines Erachtens auf die von ganzen Zahlen; Brüche sind ganze Zahlen, deren Einheit ein Stück des anfangs für die Einheit angenommenen Ganzen ist, und Irrationalgrössen muß man sich als Brüche vorstellen, da diese Einheit veränderlich, immer ein kleineres und kleineres Stück des Ganzen ist. Daß der Freyh. v. Wolf die Lehre von den Brüchen auf die von den Verhältnissen gründet, ist ein grosser Fehler wider die Methode, weil die grösste Menge der Verhältnisse, Brüche zu Exponenten hat. Daher habe ich im I. Cap. der Arithmetik alles aus den Begriffen ganzer Zahlen herzuleiten gesucht; und dabey sorgfältig gewiesen, wie hieraus Sätze folgen, die bey ganzen Zahlen augenscheinlich sind, und auch von Schriftstellern, die scharf erweisen, meiner Einsicht nach ohne zulängliche Rechtfertigung allgemein angenommen werden (*). So, glaube ich, lassen sich die arithmetischen Lehren mit völ-

(*) Ar. I. C. 82. u. f. §. IIII. C. 51. §.

Digitized by Google

völliger Schärfe und Allgemeinheit, und doch dabey leicht darthun, wenn man sie nicht von mehr abstracten Begriffen anfängt als die Noth erfordert. Die Lehre von den entgegengesetzten Grössen und die Buchstabenrechnung, ist jedem unentbehrlich; der ohne allzugrosse Weitläuftigkeit, die nothwendigsten Lehren einsehen, und in den Stand kommen will, sich selbst einigermassen zu helfen. Wie ich sie hie vortrage, haben sie nichts Geheimnißvolles, und werden keinen Anfänger erschrecken. Sollte ja einer so furchtsam seyn, so will ich ihm zehn bis zwölf Octavbände und Quartanten weisen, deren Verfasser auf verschiedenen Universitäten Deutschlandes wegen der darinn angebrachten Buchstabenrechnungen für tiefsinnige Mathematiker, ja gar für Algebraisten, gehalten werden, und ich will ihn auf meine Ehre versichern, daß ihn ein halbes Jahr in den Stand setzen soll, eben so tiefsinnige Werke zu schreiben, wenn er einen mittelmässigen Fleiß nur bey so vielem Verstande und so vieler Aufmerksamkeit anwenden will, als ein Frauenzimmer braucht das Tarok spielet.

Die Zusammensetzung der Verhältnisse wird hoffentlich im Anfange des VI. C. so erklärt seyn, daß man diese Vorstellung sehr natürlich finden, und den Ursprung der Logarithmen leicht einsehen wird. Bey der allgemeinen Er-

Digitized by Google

Erklärung der Verhältniß ist noch einige Dunkelheit, wenn man auch die Irrationalverhältniß unter sie bringen will. Die Art, wie ich die Begriffe von Irrationalzahlen, aus den von Rationalzahlen hergeleitet habe, wird vielleicht auch deutlicher machen, wie man sich jene Verhältnisse durch die Vergleichung mit Rationalverhältnissen vorstellen soll (*).

Die Geometrie würde kein Vorbild der vollkommensten Lehrart bleiben, wenn man sich verstatten wollte, Sätze, deren Wahrheit nicht augenscheinlich ist, in ihr unbewiesen anzunehmen. Dieserwegen bin ich im Erweisen so weit gegangen, als nur kann gefodert werden, wovon der Zusatz des 8 Grundſ. eine Probe seyn kann. Die Schwierigkeit, welche sich bey der Lehre von den Parallellinien findet, hat mich schon seit vielen Jahren beschäfftiget. Ich glaubte, sie wäre in Hausens Elementis Matheseos (†) völlig gehoben. Der vormahlige Prediger bey der französischen Gemeinde zu Leipzig Mr. Coste benahm mir diese Zufriedenheit, als er mir einmahl bey dem Umgange, den er mir oft gönnete, anzeigte, es sey an dem angeführten Orte von Hausen ein Schluß gemacht worden, der nicht folge. Ich entdeckte die-

(*) Ar. V. C. 23. 27. §.

(†) Geom. Prop. 13.

Digitized by Google

diesen Fehler bald selbst (†) und bemühte mich von der Zeit an, die Schwierigkeit selbst zu heben, oder Schriftsteller zu finden, die sie gehoben hätten, aber in beyder Absicht vergebens, ob ich gleich fast eine kleine Bibliothek von einzelnen Schriften oder Anfangsgründen der Geometrie sammlete, wo dieser Gegenstand besonders war betrachtet worden (*). Nachdem gegenwärtige Arbeit mich veranlasset hat, diese Sache von neuem zu überlegen, so habe ich kein Verfahren finden können, das meiner Befriedigung näher käme, als dasjenige, das ich in den Zusätzen des 11. Satzes, und im 12. S. erwählt habe. Der 12. Satz ist der umgekehrte (conversa) des eilften; und den 11. kann man in vollkommener Schärfe erweisen. Ich wollte also, daß die Lehrer der Logik, die von der Conversion so viel Regeln geben, uns an die-

(†) Cas. I. Prop. 13. folgt nicht aus Schol. Prop. 10. n. 4.

(*) Hr. Ge. Sim. Klügel jetziger Prof. der Math. zu Helmstädt, hat auf mein Anrathen die gelehrte Geschichte dieses Grundsatzes mit vielem Fleisse, und guter Beurtheilung verfasst, und solche als eine Disputation den 20. Aug. 1763. unter mir sehr geschickt vertheidigt. Conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio. Es sind da 28erley Versuche angeführt, die alle denen welche sie angestellt, werth geschienen haben, der Welt vorgelegt zu werden. **Anmerkung bey der zweyten Ausgabe.**

Digitized by Google

diesem Exempel den Nutzen ihrer hochgepriesenen Kunst zeigten; Sie würden mir und vielleicht einigen andern Leuten den Wahn benehmen, als seyen diese Regeln, wie der grösste Theil ihrer übrigen Weisheit, völlig unbrauchbar, weil man dadurch nichts findet, das nicht ein natürlicher Verstand, den die Geometrie geübt hat, ohne sie herausbrächte.

Ich habe in der theoretischen Geometrie grösstentheils Hausens Elementis Matheseos gefolgt, und die Arbeit ist mir dadurch angenehmer geworden, weil ich mich dabey des vergnügten Theiles meiner Lebenszeit erinnerte, in dem der Verfasser dieses Buches mir den Weg zu den sichersten und erhabensten Kenntnissen wiese. Von seiner Arithmetik habe ich weder den Vortrag nachahmen, noch den Innhalt völlig in gegenwärtige kurze Anfangsgründe bringen dürfen, und würde, wenn ich alle seine Lehren hätte abhandeln sollen, verschiedener Allgemeinheit sorgfältiger zu erweisen gesucht haben. Sie gehören aber grossentheils in die höhere Mathematik, und man kann sie daher erst Lehrlingen der Analysis vorlegen. Er hat den Euklides auf eine geschickte Art verkürzt, und seine Beweise unterscheiden sich von den Beweisen der Alten fast nur da, wo der den Neuern gewöhnliche Ausdruck des Unendlichen die Schlüsse zusammenziehen kann. Ich ha-

Digitized by Google

habe zu zeigen gesucht, wie dieser Ausdruck nichts weiter als die Begriffe der Alten andeute (*). Euklides und Archimedes nehmen Grössen für einerley an, wenn sie beweisen können, ihr Unterschied müsse kleiner seyn, als jede Grösse, die sich angeben lässt.

Warum ich die ausübende Geometrie der theoretischen beygefügt, deßwegen wird mich der 33. S. zulänglich entschuldigen: und die gemeine Art die Figuren auszurechnen (**) ist in der That mit der, welche Hausen (†) und andere erwählet, einerley, daß ich nicht sehe, warum ich ihr eine tiefsinnigere Gestalt geben sollte.

Von der Lage der Ebenen habe ich sehr viele Sätze in einen sehr engen Raum zu bringen gesucht, ihre Wahrheit aber wird man von mir vielleicht überzeugender dargethan finden, als von andern mit grösserer Weitläuftigkeit geschehen ist, wenn man nur auf den Zusammenhang meiner Schlüsse aufmerksam genug seyn will. Die Sätze, auf welche sich die Ausmessung der Parallelepipedorum gründet, hatte Hausen ziemlich kurz zusammengezogen (††); den ersten von ihnen aber, welches bey mir

(*) Geom. 22. S. 11. Zus. u. 24. S. und 41. S.

(**) Geom. 41. S.

(†) Geom. Prop. 41. 48.

(††) Geom. Prop. 77. 78. 79.

Digitized by Google

mir der 54. Satz ist, so allgemein angenommen, daß er auch meinen 55. Satz mit dessen Zusatze mit darunter begriffe. Mir hat es nöthig geschienen, diese Schlüsse deutlicher aus einander zu setzen.

In der Trigonometrie hatten die Erinnerungen, wie sich die Zeichen der trigonometrischen Linien, mit der Art der ihnen zugehörigen Winkel ändern (†), ihre natürliche Stelle da, wo die Begriffe von diesen Linien gegeben werden, und waren mir unentbehrlich, wenn ich zeigen wollte, wie die Buchstabenrechnung hie anzuwenden ist. Meine Absicht erforderte hie nichts mehr als diese Veränderungen durch die vier Quadranten eines Kreises zu betrachten. Ich habe sie anderswo allgemeiner angestellt (*). Bey der Berechnung der Kugeldreyecke habe ich die vorkommenden Zweydeutigkeiten alle zu entscheiden gesucht, welches sich in dieser Kürze ohne die nur erwähnten Erinnerungen von den verschiedenen Zeichen der trigonometrischen Linien nicht hätte bewerkstelligen lassen (**). Mir ist eine so vollständige Ausführung hievon nicht vorgekom-

(†) Trig. 2. Erkl. 7. 8. Zus. u. s. w.

(*) In Progr. Vnde plures insint radices aequationibus sectiones angulorum definientib. Gott. 1756.

(**) Sph. Trig. 1. S. 5. u. f. Zus. und 2. S.

Digitized by Google

kommen, grosse Werke, wie etwa Rhaetici opus Palatinum ist, ausgenommen, für die aber meine Geduld nicht zureichet. Herr Prof. Heinsius in einigen 1775. zu Leipzig herausgegebenen Programmatibus, und der Herr Geh. Rath v. Segner in seinen vortrefflichen Elementis Arithm. et Geom. haben dergleichen Anweisungen gegeben, von denen aber die meinige unterschieden ist.

Unter den Theilen der angewandten Mathematik, setzt die mathematische Perspectiv die wenigsten fremden oder unbekannten Gründe voraus, und ich habe sie beygefügt, um eine Probe zu geben, wie angenehme und nützliche Künste auf den geometrischen Sätzen beruhen. Eine weitläuftigere Ausführung verstatteten die Gränzen dieses Lehrbuches nicht.

Ich habe diese Arbeit meistens in dem letzten Viertheile des vorigen Jahres und im Anfange des jetzigen verfertiget. Man weiß den Zustand, in welchem sich damahls die hiesigen Lande befunden haben. So sehr unsere hohe Schule von den Feinden ist geschonet worden, die sich bey uns ihrer wohlgesitteten Lebensart und ihrer Neigung, Kenner, oder wenigstens Freunde der Wissenschaften zu heissen, gemäß aufgeführt haben, so musste doch ihre Gegenwart, wenigstens bey den Gesinnun-

Digitized by Google

nungen die ich habe, die Freyheit und Munterkeit des Geistes, die zum Nachdenken erfodert wird, einigermassen schwächen. Noch nachtheiliger war meiner Arbeit auser diesem allgemeinen Schicksaale mein besonderes. Eine Person, deren Gesellschaft nächst der Untersuchung der Wahrheit das einzige Vergnügen war, das ich mir recht eifrig wünschte, und die selbst an dem letztern Vergnügen so viel Theil nahm, daß sie mir solches vergrösserte und mich in meinen Bemühungen aufmunterte, war von der Vorsicht zu andern Absichten bestimmt, als ich gehofft hatte. Ihr Beyspiel sollte mir zeigen, wie man durch eine lebendige Erkenntniß höherer Wahrheiten als die erhabenste Mathematik erfindet, die härtesten Prüfungen besiegt, durch welche Gott Seelen läutert, die er bald, im Guten bestätigten Geistern gleich machen will. Hoffentlich werden mich diese Umstände entschuldigen, wenn in gegenwärtigem Werke Kleinigkeiten bey der Verbindung und Ordnung der Sätze noch einiger Verbesserung fähig wären.

Göttingen im September 1758.

Erin-

Digitized by Google

Erinnerung

bey der zweyten Auflage.

Da ich es ohngefähr zu einer Zeit mit dem Hrn. v. Segner und dem Hrn. Karsten gewagt habe, die Arithmetik und Geometrie, gründlicher und ausführlicher vorzutragen, als in den gewöhnlichen Handbüchern geschehen ist, und da unsere Bemühungen Beyfall gefunden haben, so muß doch die Neigung zu einer wahren und brauchbaren Kenntniß der Mathematik in Deutschland nicht so gar geringe seyn. Sich von dieser Neigung zu versichern, sie zu unterhalten und zu verstärken, das ist die angenehmste Belohnung die man für eine an sich nicht allzuergötzende Arbeit, für die Beschäfftigung mit Anfangsgründen erwarten kann.

Eben das reizte mich auch, bey dieser neuen Auflage einige Aenderungen zu machen, die ich bey dem bisherigen Gebrauche meines Buchs für dienlich befunden.

Digitized by Google

So gar weit von der Vollkommenheit, hielte ich es nicht entfernt daß es durch sehr grosse Verbesserungen zu einem ganz neuen Werke hätte müssen gemacht werden. Ich danke auch der Vorsicht, daß mich weder Noth noch Gesinnung treibt, in Verwandlung der Geburthen meines Geistes, den Vortheil zu suchen, den Erisichthon in den Verwandlungen seiner Tochter fand

— — ubi habere suam transformia corpora
sentit
Saepe pater dominis Triopeida vendit, at illa
Nunc equa, nunc ales, modo bos, modo
cervus abibat
Praebebatque avido non iusta alimenta parenti.
Met. VIII. 871.

Anfangsgründe in die schon alles gebracht war, was man nur in Anfangsgründe zu bringen wagen durfte, fassten keine starke Vermehrungen. In einem Lehrbegriffe, wo mit Willen nichts umsonst, nichts auser einer Verbindung mit andern gesetzt ist, musste man entweder nur wenig oder alles ändern. Ich will hie das wichtigste erzählen, worinnen sich diese Ausgabe von der vorigen unterscheidet.

In

Digitized by Google

In der Arithmetik, ist verschiedenes von den Brüchen I; 71; 85, mehr erläutert worden, imgleichen von der Zusammensetzung der Quadrate und Würfel IIII; 3, 8, 30.

In der Geometrie das Ende des Zusatzes beym 8. Grundsatz des 12. S. 11. Zus. Der Uebergang ins Verneinte durchs Unendliche. Das. 14. Zus. 20. S. 3. . . 7. Zus. Wie Beweise von Proportionen die bey Rationalverhältnissen vollkommen überzeugend sind, auch auf Irrationalverhältnisse erstreckt werden, habe ich überall deutlicher zu zeigen gesucht 22. S. 3. Z. 11; 12; Z. 24. S. und 1. Z. Eben so habe ich die Gründe der Kreisrechnung etwas mehr auseinander gesetzt. 41. S. 2, 3, 4, Z. Die Ausrechnung der Rechtecke und rechtwinklichten Parallelepipedorum, hatte ich auf die gewöhnliche Ausfüllung mit Quadraten und Würfeln gegründet, weil Anfänger es so am besten verstehen. Den tiefsinnigern Beweis, der zuerst auf die zusammengesetzten Verhältnisse führt, in denen diese Dinge stehen, habe ich jetzo denen zu Gefallen beygefügt, die etwas weiter nachzudenken Lust haben, und in dem ersten Beweise, bey Irrationalverhältnissen der Seiten, so kurz wie er da steht, nicht die völlige Ueberzeugung finden. Hie habe ich also vielleicht ein paar Seiten angewandt eine Sache zwey-

Digitized by Google

mahl zu beweisen. Wenn nur in keinem Lehrbuche mehr Ueberflüssiges wäre. Wer sich mit dem leichten Beweise befriediget, der kann in gegenwärtiger Ausgabe was nach den ersten vier Zeilen des 3. Z. beym 42. S. folgt, des 53. S. 13, 14, 15, Z. des 56, S. 2. Z. und was nach der zweyten Zeile des 10. Z. beym 58. S. folgt, übergehen. Beym 63. S. 4. Z. habe ich Bernoullis Regel abgekürzte Pyramiden zu berechnen gewiesen, und noch bequemer gemacht.

In der Trigonometrie habe ich bey des 19. S. 1, 2, 3, 4, Zus. die Rechnungen etwas mehr auseinander gesetzt. Wenn ich dieses gleich Anfangs gethan hätte, so würde ich mich dadurch eines Vergnügens beraubet haben. Denn vor ein paar Jahren verlangte ein Kaufmann aus einer Stadt ohnweit Halle, diese Auseinandersetzung von mir. Er ließ seinen noch unerwachsenen Sohn, nach meinem Buche unterrichten, und der Lehrer hatte erst bey dieser Stelle Schwierigkeit gefunden. Ein Beweis daß der Innhalt meines Buches nicht so gar sehr schwer seyn muß.

Der 7. u. f. Zusätze des 19. S. stunden vorhin meist beym 10. S. an einem nicht so bequemen Orte. Kleinere Verbesserungen, An-

Digitized by Google

Anführung einiger Schriftsteller u. d. gl. zu erzählen würde zu weitläuftig seyn. Die Kupfer sind von neuem gestochen worden. Göttingen im August 1763.

Abraham Gotthelf Kästner.

Digitized by Google

Nachricht

von der dritten Ausgabe.

Unterschiedene Druckfehler, hatte ich selbst bey dem Gebrauche meines Buchs bemerkt, und mehrere wurden mir von ein paar hiesigen Gelehrten angezeigt, welche sich desselben, bey dem Unterrichte bedienen den sie ertheilen.

Diese Freunde veranlassten mich zu einer noch wichtigern Verbesserung. Sie fanden die

Digitized by Google

die Schlüsse durch welche ich die Möglichkeit sich dem Umfange des Kreises zu nähern im 41. S. zu zeigen gesucht hatte, nicht deutlich genug aus einander gesetzt.

Den Vortrag der vorigen Ausgaben hatte ich nicht hauptsächlich aus Begierde kurz zu seyn gewählt, (denn mit Nachtheil der Deutlichkeit und Gründlichkeit muß man die Kürze nicht suchen), sondern, weil mir der Satz auf den Archimed sein Verfahren gründet: Von zween Zügen, die zwischen einerley Endpuncten enthalten und beyde nach einer Seite zu hohl sind, sey der äusere länger als der innere; mehr Erläuterung und Bestätigung zu erfodern schiene als ich hie geben wollte. Daher wollte ich nicht um den Kreis beschriebene Vielecke brauchen, wie Archimed thut, und suchte Alles aus Vielecken die in den Kreis beschrieben sind herzuleiten. Mein damahliges Verfahren, darf ich immer noch neben den besten unter den neuern Anfangsgründen sehen lassen, auch neben solchen, die sich mehr Weitläuftigkeit verstattet haben, als meinen Absichten gemäß war. Jetzo habe ich besonders die Schlüsse zu ergänzen gesucht, aus den erhellt, man komme durch eingeschriebene Vielecke, des Kreises Umfange nicht nur näher, sondern so nahe als man will. Zugleich schien

Digitized by Google

mir dienlich, Archimeds Verfahren in der Kürze vorzustellen.

Was man bey Ausdrückungen denken soll, die Producte aus Linien genannt werden, wie man sich die Ausmessungen solcher Producte vorstellen soll, weßwegen solche Abmessungen in Theilen die zusammen ein Ganzes ausmachen sollen gleich seyn müssen; das ließ sich bequem am Ende der Geometrie zeigen, wo man an solche Ausdrückungen, bey Berechnungen der Flächen und Körper schon gewohnt ist. Deßwegen habe ich den 67. Satz jetzo ganz von neuem beygefügt. Ich habe gefunden, daß aus Mangel solcher Erläuterungen, Lehrlingen der Algebra solche Sätze undeutlich gewesen sind, wo von Gleichheit der Abmessungen u. s. w. geredet wird. Selbst in der Trigonometrie muß man solche Kenntnisse haben, wenn man z. E. Vorschriften die den Sinustotus = 1 setzen, für den Halbmesser der Tafeln brauchen will.

Dieses führt mich, auf die Anwendung der Buchstabenrechnung auf die Trigonometrie. Ich habe solche sehr verändert. Wie die Formeln wo der Sinustotus = 1 gesetzt wird, mit den gewöhnlichen Tafeln und Logarithmen verbunden werden, das Anfängern

deut-

Digitized by Google

deutlich zu erklären schien mir nöthig; Bisher hatte ich es meinen Vorlesungen vorbehalten, es ist aber ohne Zweifel gut, wenn der Zuhörer es auch im Buche selbst findet. Die ersten Formeln, für Sinusse der Summen und Differenzen so zu berechnen, daß jede der gegebenen oder gesuchten Grössen, mit ihrem eigenen Buchstaben bezeichnet, selbst der Halbmesser nicht so gleich = 1 gesetzt wird, scheint mir immer der Deutlichkeit gemäß. Alsdenn aber habe ich diese und die folgenden Formeln, in den Zeichen die Hr. Euler eingeführt hat ausgedruckt, welche vornähmlich deßwegen bequemer sind, weil man oft für einen und denselben Winkel, bald diese bald jene trigonometrische Linie braucht. Hiebey gaben sich Gelegenheiten, die Rechnungen bequemer einzurichten, selbst einiges hinzuzusetzen.

In der sphärischen Trigonometrie ist der Beweis des 8. S. deutlicher aus einander gesetzt worden. Die übrige Einrichtung scheint mir die beste für den Anfänger zu seyn, den man ohne Zweifel hiebey auf die Betrachtung der Figuren führen muß. Auch muß er die Regeln so kennen lernen, wie solche in allen ältern Schriften, und noch in vielen neuern gebraucht werden. Zu den analytischen Formeln, die ich nach Hr. Eulern in meiner astronomischen Abhandl. I. Samml. 2. Abh. ge-

Digitized by Google

gegeben habe, kann er erst alsdenn mit Nutzen fortgehen.

Einzelne kleine Verbesserungen von Ausdrückungen, oder kurze Zusätze, wie 155. S. das Verfahren, eines eigentlichen Bruches Logarithmen, durch einen bejahten und verneinten Theil auszudrucken; die verlangt man wohl nicht vorgezählt zu haben. In den Figuren ist auch Einiges verbessert worden.

Göttingen im Auguſt 1774.

Digitized by Google

Vorrede

der vierten Auflage.

Bücher zu Erweiterung der ersten Kenntniſſe ſind überall angeführt, bey einzelnen Gegenſtänden, und bey gröſſern Abtheilungen der Wiſſenſchaften, wie: Von der ſo genannten praktiſchen Geometrie 267. S. Euklids Elemente 424. S. Ein Verzeichniß arithmetiſcher und geometriſcher Bücher das ſich nur einigermaſſen der Vollſtändigkeit näherte, lieſſe ſich freylich hie nicht einſchieben. Es erfodert ein eigenes Werk, und Hr. Prof. Scheibel hat in ſeiner Einleitung zur mathematiſchen Bücherkenntniß hierinn was vortreffliches geliefert. Hie habe ich noch bey weitem nicht alle die Bücher erwähnt die ich meinen Zuhörern mit vorzulegen pflege. Wer die Anfangsgrün-

Digitized by Google

gründe einer Wissenschaft gehörig gefasst hat, kann sich immer aus jedem zu ihr gehörigen Buche etwas zu nutze machen. So gehört Bücher zu nennen und vorzuzeigen nicht etwa in die Prolegomena der Wissenschaft, sondern dahin wo von den Gegenständen der Bücher schon zulängliche Begriffe gegeben sind; Es wäre denn daß man die Bücher als Quellen eines Theils der Gelehrsamkeit zuerst nennen müsste, wie in der Geschichte.

Von dem übrigen Vermehrungen dieser Ausgabe zeige ich hie einige der stärkern an.

Ein Exempel zur Vergleichung ähnlicher Parallelepipeden 368. S. Wo sich ökonomischer Nutzen der Lehre zeigt daß sie sich verhalten wie die Würfel ihrer Seiten.

Genauere Durchzählung der Arten von Pyramiden und Kegeln 381; 385; S.

Die Ausrechnung abgekürzter Pyramiden und Kegel auf Gewichte, Maasse, Baumstämme, angewandt; 395. S.

Von

Digitized by Google

Von mancherley in Ebenen eingeschlossenen Körpern. 415. S.

Proportionaltheile bey den trigonometrischen Tafeln 442. S.

Mannichfaltiger Gebrauch des rechtwinklichten, und des gleichschenklichten Dreyecks zum Winkelmessen, auch dahin gehörige Werkzeuge als: geometrisches Quadrat, Jacobsstab, ptolemäische Regeln, Proportionalzirkel u. d. gl. 449. S.

Trigonometrische Vergleichung zwischen Halbmesser, Sehne, Winkel am Mittelpuncte, Ausschnitt und Abschnitt. 478. S.

Berechnung des Halbmessers eines Kreises um ein gegebenes Dreyeck. 515. S.

Zahlen und Logarithmen zur Kreisrechnung, 320; 321; S. Und ein paar Tafeln am Ende des Buches.

Ich habe dergleichen Anwendungen der Theorie auf die Ausübung immer in meinen Lehr-

Digitized by Google

Lehrstunden beygebracht, und glaubte es wäre eine Bequemlichkeit mehr für den Zuhörer, solche im Buche zu finden.

Auf dem Titel gegenwärtiger Ausgabe, heisst das Buch: des ersten Theils der mathematischen Anfangsgründe erste Abtheilung, weil die neue herausgekommene Fortsetzung der Rechenkunst, als die zweyte anzusehen ist.

Göttingen den 11. April 1786.

Digitized by Google

Innhalt.

Vorerinnerungen. 1. S.

Die Rechenkunst.

I. C. Von ganzen Zahlen, Brüchen, und entgegengesetzten Grössen. 21. S.
II. C. Die Buchstabenrechnung. 75.
III. C. Die Rechnung mit zehntheilichen und sechszigtheilichen Brüchen. 81.
IIII. C. Die Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzel. 92.
V. C. Von den Verhältnissen. 128.
VI. C. Von der Zusammensetzung der Verhältnisse, den Reihen und den Logarithmen. 145.

Die Geometrie.

Die ebene theoretische Geometrie. 165. S.
Anwendung derselben auf die ausübende Geometrie. 245.
Ausrechnung der Figuren. 288.
Von den Lagen der Ebenen. 333.
Von den Kugelschnitten. 342.
Die Möglichkeit prismatischer Körper. 351.

Die

Digitized by Google

Die Ausmeſſung der Körper. 365. S.
Die ebene Trigonometrie. 428.
Von den rechtwinklichten Dreyecken. 446.
Von gleichſchenklichten Dreyecken. 455.
Allgemeine Auflöſungen der Dreyecke. 467.
Anwend. auf die practiſche Geometrie. 486.
Anwendung der Buchſtabenrechnung trigonometriſche Lehrſätze zu finden. 487.
Die ſphäriſche Trigonometrie. 525.
Von rechtwinklichten Dreyecken. 528.
Von ſchiefen. 536.
Die Perſpectiv. 554.

Digitized by Google

Vorerinnerungen von der Mathematik überhaupt und ihrer Lehrart.

1. Was einer Vermehrung oder Verminderung fähig ist, heißt eine Grösse. Diese Eigenschaft also unterscheidet Dinge, bey denen man sonst nichts unterschiedenes betrachtet, z. E. eine Menge Ducaten von einer andern, die alle einerley Gepräge und Gewichte haben.

2. Wie groß ein Ding sey, entdeckt uns entweder die unmittelbare Vorstellung, die wir von dem Dinge selbst haben, oder die Vergleichung mit einer andern bekannten Grösse. Wer eine Meile gereiset ist, hat einen Begriff von der Länge.

Digitized by Google

des Weges, den man so nennt, durch die Empfindung erhalten; und wenn er tausend Meilen nennen höret, so stellt er sich diesen Weg tausendmahl an einander gesetzt vor.

3. Die Weite zweener Oerter von einem dritten mit einander zu vergleichen, pflegt man jede durch Meilen auszudrücken. Die Meile ist hier ein Maaß, eine Grösse, die man als bekannt ansieht, und untersucht, wie vielmahl sie in jeder der andern Grössen enthalten ist. Dieses Verfahren heisst messen. Zuweilen muß man auch angeben, was für Stücken des Maasses in dem Gemessenen enthalten sind.

4. Die unmittelbare Messung erfodert nicht allemahl viel Geschicklichkeit, zumahl wenn keine grosse Schärfe verlangt wird. Jeder kann einen Weg mit Schritten ausmessen: Aber eine Grösse mit einem gegebenen Maasse zu vergleichen, ohne daß man es wirklich an sie anbringt, z. E. die Entfernung zweener Oerter zu sagen, ohne daß man unmittelbar von einem zum andern zu messen braucht, ist schwerer, und setzt Begriffe von den Grössen voraus, aus denen sich ihre Vergleichung durch Schlüsse herleiten läßt, auch wenn man sie mit den Sinnen nicht unmittelbar empfindet. Die Mathematik enthält eigentlich solche Lehren, vermittelst derer die Grössen sich durch Schlüsse vergleichen lassen: obgleich zu ihrer Anwendung auf sinnliche Grössen, auch unmittelbare Messungen erfodert werden. Läßt

sich

sich die Weite des Mondes von der Erde angeben, so muß solches ohne Zweifel durch Schlüsse geschehen, deren Vordersätze zum Theil, aber gewiß nicht alle, Empfindungen seyn können.

5. Die Erkenntniß der Grösse; die mathematische Erkenntniß liesse sich also in eine gemeine und gelehrte abtheilen. Aber wenn diese soll angewandt werden, ist jene unentbehrlich; so wie sie durch die letztere oft vollkommener wird.

6. Die Grösse läßt sich von allen andern Eigenschaften einer Sache abgesondert betrachten; und dieses thut die reine und abgesonderte Mathematik (Mathesis pura vel abstracta); oder man betrachtet zugleich die andern Eigenschaften der Sachen mit, bey denen sich die Grösse befindet, wie in der angewandten (applicata).

Eine Länge von 10 Meilen blos als eine Länge betrachtet, gehöret in die reine Mathematik; als die Entfernung zweener Oerter auf der Erde betrachtet, in die angewandte.

7. Man kann die Grösse blos als eine Menge von Theilen; als ein Ganzes (Totum) betrachten; oder man kann zugleich auf die Verbindung und Ordnung dieser Theile sehen, welche ein gewisses zusammengesetztes Ding (compositum) ausmachet. In jener Betrachtung gehöret sie für die Arithmetik, in dieser für die Geometrie.

Will man einen Klumpen Bley blos zum Gewichte gebrauchen, so ist seine Gestalt völlig gleichgültig, wenn nur kein Bley davon, und keines

Digitized by Google

dazu kömmt: Aber eine Bleykugel bleibt zu dem Gebrauche, zu dem sie bestimmt ist, nicht mehr dienlich, wenn man aus ihr Schrot giessen wollte.

8. Das Ganze ist mit seinen Theilen einerley, oder man kann ohne Abgang der Grösse, allezeit alle Theile statt des Ganzen oder umgekehrt, setzen; alle Theile des Zusammengesetzten aber sind mit dem Zusammengesetzten nicht einerley, wenn sie nicht in der gehörigen Verbindung stehen.

9. Die Lehren der reinen Mathematik lassen sich alle zu einer von den genannten beyden Wissenschaften (7) bringen, ob man wohl der Bequemlichkeit wegen, Abtheilungen derselben mit Nahmen eigener Wissenschaften belegt hat. Die Art, unbekannte Seiten oder Winkel eines Dreyecks zu berechnen, heisst die Trigonometrie, und wird nach Verschiedenheit dieser Dreyecke, in die ebene und sphärische abgetheilt. Die Buchstabenrechnung bedienet sich der Buchstaben als allgemeiner Zeichen der Zahlen; die Analysis lehrt das Unbekannte finden, indem man es als bekannt ansieht, und aus seinem Verhalten gegen andere bekannte Dinge herausbringt, wie es durch solche zu bestimmen ist. Die Alten haben uns vornehmlich Muster der geometrischen Analysis hinterlassen. Die neuern haben sie erweitert, indem sie angefangen haben, die Grössen allgemeiner als Zahlen zu betrachten. Daraus ist die Algebra, die Lehre von den Gleichungen, von verschiedenen Ausdrückungen einerley Grösse entstanden. Man hat diese Algebra auf

die

Digitized by Google

die Kegelschnitte, welche die Alten mehr geometrisch betrachtet hatten, und auf andere krumme Linien angewandt, und auf den Grund, daß sich stetige Grössen ohne Ende vermindern und vermehren, theilen und vervielfachen lassen, die Rechnung des Unendlichen gebauet, die sich wieder in die Differential- und Integralrechnung theilet, nachdem man aus der gegebenen Vergleichung zwischen endlichen, und bestimmten Grössen, die Vergleichung zwischen den Geschwindigkeiten, mit denen sie sich ändern, oder aus der letzten Vergleichung die erste sucht. Alle diese zur Analysis gehörige Wissenschaften sind eigentlich grosse Capitel der Arithmetik oder der Geometrie, oder einer Wissenschaft, die aus beyden zusammengesetzt ist. Man begreift sie, und ihre Anwendungen unter dem Nahmen der höhern Mathematik. Sie setzen jemanden, der in ihnen geübt ist, in den Stand, die wichtigsten Erfindungen zu verstehen, und selbst Wahrheiten zu erfinden, und ohne sie ist es nicht möglich oder doch sehr schwer, in der reinen Mathematik oder der angewandten weit zu kommen.

10. Die angewandte Mathematik erhält ihren Nahmen daher, daß sie jener ihre Lehren auf die wirklichen Sachen selbst anwendet. Hieher kann schon die Anwendung der allgemeinen arithmetischen Vorschriften, auf Fragen, die in der Hauswirthschaft, in Handel und Wandel u. d. g. vorkommen, gezählet werden. Wenn diese Fragen nur solche Kenntnisse verlangen, die man bey jedem

Schüler der Arithmetik voraussetzen darf, und ihre Beantwortung sich kurz fassen lässt, so können sie selbst in der Arithmetik als Exempel beygebracht werden. Auserdem aber entstehen Anwendungen der Arithmetik, die nur für gewisse Lebensarten brauchbar sind, z. E. kaufmännische Rechnungen. Von der Geometrie ist eine einfache und leichte Anwendung das Feldmessen, welches man gewissermassen selbst mit der Theorie, den Vortrag abwechselnder und angenehmer zu machen, verbinden kann. Ueberhaupt aber hat die angewandte Mathematik keine andern Gränzen als die Welt, und kann so viel Wissenschaften enthalten, so vielerley Gegenstände es giebt, bey denen sich Grössen durch Schlüsse bestimmen lassen.

11. Die gewöhnlichsten Gegenstände dieser Art sind die Kräfte der Körper, vermöge deren sie Bewegungen erregen oder hindern; das Licht, und die himmlischen Körper, von denen wir fast durch keinen Sinn als durch das Gesicht Empfindungen haben. Dieses giebt drey Theile der angewandten Mathematik; die Mechanik, Optik, Astronomie. Jeder begreift so viel unter sich, daß man ihn in neue Theile zergliedert.

12. Die Mechanik betrachtet die Körper entweder in ihrer Bewegung, da man ihr diesen Nahmen lässt, oder im Gleichgewichte, da sie die Statik heisst. Das Gleichgewicht flüssiger, blos schwerer Körper wird in der Hydrostatik, ihre Bewegung in der Hydraulik, und was

elastis

elastische flüssige Körper betrifft, in der Aerometrie abgehandelt.

13. Licht, das gerade fortgehet, das von Spiegeln zurückgesandt; in durchsichtigen Materien gebrochen wird, ist der Gegenstand der Optik; Katoptrik; Dioptrik.

14. Die Eintheilung des Raums und der Zeit auf der Erde, müssen vom Himmel erlernet werden. Jener wird in der mathematischen Geographie betrachtet, diese, wenn von einzelnen Tagen die Rede ist, in der Gnomonik; Jahre, Hunderte und Tausende von Jahren gehören in die Chronologie.

15. Man hat die Geschützkunst; die bürgerliche und die Kriegsbaukunst auch zur Mathematik gerechnet. In der That erfodern diese Künste zu ihrer Ausübung noch eine Menge solcher Kenntnisse, die nicht mathematisch sind. Der Mathematikverständige kann sich diese Kenntnisse erwerben, der Unwissende in der Mathematik aber kann mit ihnen allein, in der Ausübung dieser Künste nicht gehörig fortkommen.

16. Diese Wissenschaften pflegt man insgemein in den mathematischen Lehrbüchern abzuhandeln. Es gibt aber mehr Gegenstände, die von den Mathematikverständigen so sind untersucht worden, daß sie besondere Wissenschaften geben können. Die Musik ist vor alters als ein beträchtlicher Theil der Mathematik angesehen worden, und auch viele neuere Mathematikverständigen haben sich mit ihr beschäftiget. Die Schifkunst, welche den Weg

Digitized by Google

eines Schiffes auf dem Meere bestimmen lehret, kann mit zur Geographie gerechnet werden; aber die Regierung des Schiffes durch den gehörigen Gebrauch seiner Theile, beruhet auf der Mechanik.

17. Die Mathematik erstreckt sich sogar weiter als auf blos sinnliche Dinge. Wahrscheinlichkeiten und Hoffnungen hat sie zu berechnen angewiesen, man befragt sie um die Dauer des menschlichen Lebens bey Leibrenten, Tontinen u. d. g. und beurtheilet nach ihren Regeln das Wachsthum eines Staats an Bürgern. Selbst Vergnügen und Schmerz würde sie sich auszumessen unterstehen, wenn ein Maaß, das einerley Empfindung allen Geistern verständlich machte, hie zu entdecken wäre.

18. Wenig menschliche Verrichtungen sind, von denen nicht ein Theil auf mathematischen Gründen beruhete. Pflug und Wagen, alle Werkzeuge der Handwerker und Künstler sind Maschinen, von deren Beschaffenheit und Gebrauche die mathematische Kenntniß richtiger urtheilen lehret. Von allen solchen Verrichtungen ist insgemein ein Theil physisch, der andere mathematisch. Die Zeichenkunst und Perspectiv sind das Mathematische der Mahlerkunst, die Eigenschaften der Farben, die Wirkungen ihrer Mischung, ihre Dauerhaftigkeit u. d. g. das Physische. Daß Künstler und Handwerker keine Kenntniß von der Mathematik haben, das beweiset nicht, daß die Mathematik ihnen unnütze sey. Man kann Lehren brauchen, die man gelernt hat,

Digitized by Google

hat, ohne ihre Gründe zu wissen, ohne einmahl zu wissen, daß sie in eine Wissenschaft gehören. Aber wenn die Wissenschaft nicht wäre getrieben worden, so hätten diese Lehren, die in der Ausübung unentbehrlich sind, nicht können entdeckt werden. Der Kaufmannsjunge lernt rechnen, ohne zu wissen, daß ohngefähr vor zwey tausend Jahren ein griechisches Buch ist verfasst worden, aus dem alle nachfolgende Zeiten die Lehren von der Verhältniß und Proportion, auf denen die Regel Detri beruhet, erlernet haben. Hätte man dieses Buch nicht gehabt, so wären diese Lehren vielleicht von einem andern scharfsinnigen Kopfe erfunden worden; aber von dem Kaufmannsjungen, dem sie doch unentbehrlich sind, gewiß nicht.

19. Vorschriften, denen man folgt, ohne ihre Gründe zu wissen, können an sich unrichtig seyn, wenn unser Lehrer nicht Einsicht oder Aufrichtigkeit genug hat: Sind sie auch richtig, so können wir bey ihrer Anwendung fehlen, weil wir ihre rechte Bedeutung und ihre Gränzen, nicht zu bestimmen wissen; und endlich wird es uns allezeit schwerer, wenn wir sie blos im Gedächtnisse behalten sollen, als wenn wir die Verbindung mit ihren Gründen durch den Verstand einsehen. Die Rechenkunst kann hier wieder Exempel geben.

20. Oft macht sich ein Künstler mathematische Regeln von seinen Beschäfftigungen, die ihn seine Aufmerksamkeit lehret, ob er gleich ihren Zusammenhang mit allgemeinern Gründen nicht einsieht.

Digitized by Google

Das Gefühl lehret den Fechter die Stärke und Schwäche des Degens, und die Regeln des Lagers, wenn er auch nichts vom vecte heterodromo und centro gravitatis gehört hat. Auf diese Art erfindet man sich eine Mathematik zu seinem Gebrauche, die aber nur in die engen Gränzen dieses besondern Gebrauchs eingeschränkt ist. Da alle Menschen, die nicht Schlafmützen sind, dieses ohne Unterricht thun, so besitzt die menschliche Seele ohnstreitig ein Vermögen, mathematische Wahrheiten aus sich selbst zu entwickeln, wenn Neigung und Umstände sie darauf führen. Man kann es die natürliche Mathematik nennen.

21. Hoffentlich braucht es keinen weitläuftigen Beweis, daß eine Wissenschaft, oder vielmehr eine Sammlung von Wissenschaften nützlich sey, deren Verbindung mit allen menschlichen Beschäfftigungen so offenbahr ist. Einem Gelehrten ist es am allerwenigsten anständig, in ihr ganz unwissend zu seyn, wenn er nicht die Beschämung haben will, von Dingen, die ohne Zweifel für die Menschen wichtig sind, eben so schlechte Begriffe zu haben als der Pöbel. Die Art, wie man auf hohen Schulen die Mathematik vorzutragen gewohnt ist, kann, wenn der Lehrer die gehörigen Geschicklichkeiten besitzt, Studirenden wenigstens die ersten Begriffe von den vielfältigen Kenntnissen, welche die Mathematik enthält, und ihrer mannichfaltigen Anwendung geben, und wenn sie besonders in der reinen Mathematik eine gründ-

liche

Digitized by Google

liche Einsicht, und in der Algebra einige Fertigkeit erlangt haben, so werden sie im Stande seyn, diejenigen Untersuchungen, die vorzüglich ihren Absichten gemäß sind, durch Lesen und Nachdenken selbst weiter zu treiben, oder durch besondern Unterricht darinnen, nützlicher zu gebrauchen. Der eigene Fleiß wird bey allen Theilen der Gelehrsamkeit erfodert. Die Mathematik aber läßt sich in den Stunden, die man auf Anhörung ihrer Lehren zu wenden pflegt, desto weniger vollkommen erlernen, da dieser Stunden in Vergleichung mit der Menge der Sachen viel zu wenig sind.

22. Verschiedne Schriftsteller haben den Nutzen umständlicher gewiesen, den die Gottesgelehrten, die Rechtsgelehrten, die Arzneyverständigen, und andere Gattungen von Gelehrten von der Mathematik haben können.

23. Man hat noch einen Grund, weswegen die Mathematik einem Gelehrten angepriesen wird. Ohne Absicht auf den Gebrauch ihrer Wahrheiten selbst, behauptet man, daß schon die Art, wie dieselben vorgetragen werden, seiner Aufmerksamkeit, und wo möglich seiner Nachahmung in der Wissenschaft, mit welcher er sich vornehmlich beschäfftigt, würdig sey. Die mathematische Methode nähmlich soll die einzige seyn, die zur Gewißheit führet, und der man sich also zu bedienen hat, wenn man vor Irrthümern sicher seyn will. Diese Untersuchung gehört eigentlich in die Logik, weil aber einige seyn wollende Vernunftlehrer, ihren

Schü-

Digitized by Google

Schülern von der mathematischen Methode irrige Begriffe beybringen, so ist es nöthig, hier kürzlich davon zu reden.

24. Ohne die Mathematik selbst zu kennen, kann man eine Nachricht aus dem übereinstimmenden Zeugnisse aller, die sich um die Geschichte der Gelehrsamkeit bekümmert haben, als zuverlässig annehmen; daß nähmlich alle Lehrer der Arithmetik und Geometrie über alle Sätze vollkommen einig sind; Von keinem Theile der Gelehrsamkeit lässt sich dieses weiter sagen, da in ihnen überall, nicht über Kleinigkeiten, sondern über die ersten Gründe, und die wichtigsten Lehren gestritten wird. Was giebt wohl der Mathematik diesen Vorzug? Vielleicht ihr Gegenstand? Aber wie käme es, daß unsere Erkenntniß von der Grösse allein so gewiß, und von allen andern Dingen so ungewiß wäre? Sprechen wohl alle Mathematikverständige ihrem Lehrer seine Sätze mit einer Leichtgläubigkeit nach, die nur von dem Vorurtheile des Ansehens herrühret? Wie könnte ein solches Vorurtheil über diejenigen so unumschränkt herrschen, von denen jedermann weiß, daß sie ihren Fleiß für eine der schärfsten Uebungen des Verstandes ausgeben? Mit was für einer Verblendung hätten Euklid und Archimed sich vor Prüfungen schützen können, die den Plato und Aristoteles gestürzt haben? Ramus, dem es an Scharfsinnigkeit nicht fehlte, bestrebte sich, eine neue Secte in der Mathematik wie in der Philo-

sophie

sophie zu stiften. Würde er Irrthümer im Euklides ungeahndet gelassen haben? Er tadelte nichts als die Ordnung der Sätze, und seine neue Ordnung hat keinen Beyfall gefunden.

25. Die Einigkeit der Mathematikverständigen läßt sich also nur aus ihrer Art, ihre Lehren zu erforschen und vorzutragen, herleiten. Diese muß so beschaffen seyn, daß sie selbst dadurch vor Irrthümern sicher sind, und andere zwingen können, ihnen Beyfall zu geben.

26. Sie fangen von Erklärungen an; das ist, sie zeigen deutlich und genau an, in was für einer Bedeutung sie die ihnen eignen Wörter brauchen, und gehen nie von dieser Bedeutung ab. Ihre Erklärungen enthalten weder mehr noch weniger Merkmahle als die Sache, von der die Rede ist, zu erkennen zulänglich sind. Zuweilen bestehen diese Merkmahle in der Art, wie die Sache entstehen kann, woraus man denn ihre Möglichkeit einsieht, und solche Erklärungen besonders Sacherklärungen nennt (definitiones reales vel geneticae). Die andern heissen Worterklärungen (nominales) und man nimmt nicht an, daß die erklärten Sachen möglich sind, ohne es erwiesen zu haben; eine Regel, die gewisse Vernunftlehrer nicht prahlerisch für ihre neue Erfindung ausgeben würden, wenn sie wüssten, daß Euklides dieselbe aufs sorgfältigste beobachtet hat.

27. Aus den Erklärungen fliessen Grundsätze (axiomata) deren Wahrheit man einsieht, so bald

man

man sie versteht. Der 8. Abs. enthält ein Exempel davon. Man kann aber hievon, und von allen Sätzen der mathematischen Methode Exempel von ganz andern Gegenständen als mathematischen hernehmen. Es würde zu weitläufig werden, dergleichen hie überall einzurücken. Die Grundsätze werden von allen Menschen gebraucht, und oft ohne daß sie daran denken, aber nur auf einzelne Gegenstände angewandt; daher man sie auch gemeine Begriffe (notiones communes) nennt. Oft giebt ihnen nur ihr allgemeiner Ausdruck ein geheimnisvolles Ansehen.

28. Sie sind von zweyerley Art. Wenn sie blos Wahrheiten behaupten, so kann man ihnen diesen Nahmen in einem engern Verstande lassen. Wenn sie fodern, daß man eine Sache verrichten könne, ohne die Art, wie es geschehen soll, zu zeigen, weil solche vielleicht zu offenbar in die Augen fällt, als daß sie dürfte gezeigt werden; so nennt man sie Heischesätze, Foderungen (postulata). Sie nehmen also eine Sache als möglich an, ohne die Möglichkeit umständlich darzuthun.

29. Die Sätze, deren Richtigkeit nicht unmittelbar in die Augen fällt, sondern gewiesen werden muß, behaupten entweder blos, daß etwas so sey oder nicht sey; oder sie verlangen etwas zu bewerkstelligen. Jenes sind Lehrsätze; (theoremata) dieses Aufgaben (problemata) denen man die Auflösung (solutio) die Art, wie das Verlangte bewerkstelligt wird, beyfügt. Der

Ver-

Beweis des Lehrsatzes thut desselben Wahrheit dar, der Aufgabe ihrer zeigt, daß dasjenige, was man verlangt, erhalten wird, wenn man der Auflösung gemäß verfährt. Beyde bestehen in Schlüssen, die man, wenn es gefällig ist, in die syllogistische Form bringen kann, und wozu die Vordersätze aus den vorhergehenden Erklärungen, Grundsätzen und bewiesenen Sätzen genommen werden.

30. Zuweilen kömmt man in diesen Schlüssen auf Sätze, die an sich merkwürdig sind. Man kann sie also nach vollendetem Beweise besonders anzeigen. Dieses haben die Alten corollaria genannt. Gegenwärtig nimmt man dieses Wort und seine Verdeutschung Zusätze, mehr für Folgerungen, die sogleich aus dem erwiesenen Satze fliessen; für Lehrsätze, deren Beweis aus dem nur Beygebrachten sogleich in die Augen fällt. In den Anmerkungen (scholia) pflegt man Erläuterungen und Anwendungen der vorgetragenen Sätze beyzubringen.

31. Das Wesentliche der mathematischen Methode besteht darinnen, was man lehrt, aus Gründen, derer Wahrheit ungezweifelt ist, durch Schlüsse, deren Richtigkeit den Verstand zum Beyfalle zwingt, darzuthun. In einem andern Verstande haben die wahren Kenner dieser Methode nie behauptet, daß man sich bestreben sollte, sie bey den übrigen Theilen der Gelehrsamkeit anzubringen. Die Pflicht, sie in diesem Verstande, so viel sich thun läßt, anzubringen, wird

hof-

hoffentlich ein jeder Gelehrter zugeben, der nicht seiner Facultät die Lobrede halten will, daß sie keiner deutlichen Begriffe, keiner sichern Grundsätze, und keiner vernünftigen Schlüsse fähig sey. Wie sich Gewißheit in andern als mathematischen Untersuchungen erhalten lasse, und warum es in diesen leichter ist, zeigt Locke Versuch vom menschlichen Verstande 3. B. 11. H. 4. B. 2. H. und anderswo. Man vergleiche damit die lehrreichen Noten, die Poley seiner Uebersetzung dieses Buchs, Altenb. 1757. beygefügt hat. Mein Aufsatz: Ueber den Gebrauch des mathematischen Geistes auser der Mathematik, in meinen vermischten Schriften II. Theil, X.

32. Einen Unterschied unter der mathematischen und philosophischen Methode vorgeben, weil den Mathematikverständigen die Untersuchung der Grössen ein eigenes Verfahren erlaubte, das sich anderswo nicht nachahmen liesse, ist lächerlich, da niemand das Verfahren der Mathematikverständigen, in so fern es sich auf den ihnen eigenen Gegenstand bezieht, zur Nachahmung vorgeschlagen, niemand verlangt hat, wo keine Grössen vorkommen, zu messen und zu rechnen.

33. Man hat die mathematische Methode besonders nach dem Verfahren des Euklides abgeschildert, und sie daher die geometrische oder Euklidische genannt. Schwerlich wird man sie auch recht kennen lernen; wenn man nicht diesen Schriftsteller,

Digitized by Google

steller, und solche, die ihm getreu folgen, liest. Neuere Lehrer der Geometrie sind von der gehörigen Schärfe im Beweisen oft weit abgewichen. Man muß dieses insbesondere von den Franzosen sagen. Es ist bey ihnen eine Folge, zum Theil der Nationalflüchtigkeit, zum Theil einer lobenswürdigen Ursache, der Neigung, welche vornehme Kriegsleute und andere, deren Hauptbeschäfftigung das Studiren nicht ist, zur Mathematik tragen. Solchen Personen hat man die Erlernung der Mathematik erleichtern und angenehm machen wollen. Aber Euklides wusste Königen keinen Weg zur Geometrie zu ebnen.

34. Auser der Geometrie, ist noch eines und das andere bey der mathematischen Methode zu beobachten. In der Arithmetik hat man Zeichen für die Zahlen ausgedacht; deren Beschaffenheit und Einrichtung man durch willkührliche Sätze (hypotheses) erkläret, weil sich eben die Dinge mit ganz andern Zeichen hätten andeuten lassen. Man hat Kunstgriffe angebracht, vermittelst deren sich alle Zahlen, deren Menge unendlich ist, durch sehr wenige Zeichen ausdrücken, und mit einander vergleichen lassen. Die Kunstwörter in den Wissenschaften sind Zeichen der Begriffe, wie die Zifern in der Arithmetik. Aber das Verfahren der Arithmetik, mit sehr wenig Zeichen, sehr viel Begriffe verständlich und bequem auszudrücken, wird nicht überall bey den Kunstwörtern nachgeahmt. Besonders pflegen einige Philosophen auch da-

Digitized by Google

durch den groſſen Unterſchied zwiſchen ihrer philoſophiſchen und der mathematiſchen Methode anzuzeigen, daß ſie mit vielen Zeichen wenige Begriffe, und oft gar keine, ausdrücken.

35. In der angewandten Mathematik gehören zu den Grundſätzen, auch mit Erfahrungen, Beobachtungen und Verſuche; durch eine aufmerkſame Betrachtung der himmliſchen Körper ſind die Aſtronomen zu einer Kenntniß derſelben gelangt, welche die Schranken des menſchlichen Verſtandes faſt zu überſteigen ſcheint, ob ihnen gleich dieſe Körper nur aus dem Anſehen in groſſen Entfernungen bekannt ſind. Dieſes erhabne und unläugbare Beyſpiel zeigt, daß ſich der Nutzen der mathematiſchen Methode auch auf Gegenſtände in der wirklichen Welt, von denen unſere Begriffe nicht willkührlich ſind, anwenden laſſe, auf Geſchichte, denn Aſtronomie iſt eine Geſchichte des Himmels. Der Freyherr von Wolf hat es den Aerzten zur Nachahmung vorgeſtellt, und ſeine Erinnerung wird dadurch vollkommen gerechtfertigt, daß die alten griechiſchen Aerzte, die in der Kenntniß der Natur ſo weit unter den heutigen ſtehen, in der Heilung der Krankheiten noch ihre Lehrmeiſter bleiben. Sie haben nähmlich den menſchlichen Körper ſo aufmerkſam und ſorgfältig betrachtet, als die Aſtronomen den Himmel. Wolfs Abh. de medico aſtronomos imitante findet ſich in ſeinen horis ſubſecivis Marburgenſibus 1729 am Ende des 1. Quartals. Deutſch in:

Wolfs

Digitized by Google

Wolfs gesammlete kleine philos. Schriften von G. F. H (Hagen) III. Th. 698. S. Es sind sechs Theile dieser Sammlung erschienen, die Schriften nach den Wissenschaften geordnet, Halle I. Th. 1736. 8. VI. Th. 1740; 8.

36. Man hat sich in der Astronomie eines Mittels zu Erforschung der Wahrheit bedient, das dem ersten Ansehn nach verführerisch scheint. Man nimmt Hypothesen an, oder man setzt zum voraus, es gehe mit einer gewissen Begebenheit auf die und die Art zu. Läßt sich nun alles, was bey der Begebenheit und den damit verbundenen vorkömmt, aufs genaueste aus der Hypothese herleiten, so erhält dieselbe dadurch immer mehr und mehr Wahrscheinlichkeit, und kann durch eine vollkommene Uebereinstimmung aller Begebenheiten mit ihr, zu einer Gewißheit erhoben werden. Diese Vergleichung mit den Begebenheiten ist also die Prüfung, bey der eine falsche Hypothese nicht lange bestehen, wenigstens nicht verführen kann, weil man sie nicht länger beybehalten wird, als sie der Wahrheit gleichgültig ist. Indessen kann selbst eine falsche Hypothese, durch das was in ihr wahr ist, den Weg zu Kenntnissen bahnen, zu denen man ohne alle Hypothesen, nie gelangt wäre. Dieses ist von einigen als ein Fall angesehen worden, wo man Wahrheit aus Unwahrheit richtig herleitet, und Erdichtungen zum Erfinden (fictiones heuristicas) mit Nutzen brauchte: Meiner Einsicht nach wird nie aus der Unwahrheit, sondern allezeit aus der Wahrheit

geschlossen. Es giebt Sätze, die nicht völlig wahr sind, sondern Wahrheit und Falschheit untermengt haben; aber sie dienen uns nur zu sichern Gründen, in so fern sie Wahrheit enthalten. Man muß auch das bedenken, daß in der Mathematik sich nicht alle Grössen wirklicher Dinge gleich anfänglich mit der grössten Richtigkeit finden lassen; daß man sie oft zuerst nur ohngefähr bestimmt, und diese Bestimmungen selbst braucht, daraus schärfere zu finden. Solche schärfere Bestimmungen suchen, heißt nicht, die ersten für falsch erklären. Die Mathematik überzeuget uns durch unzählige Proben, daß wir auch bey der höchsten Erkenntniß der Menschen zufrieden seyn müssen, der Wahrheit immer näher und näher zu kommen, die wir vielleicht nie völlig erreichen werden.

Weil sich unser Aug am Kleid der Dinge stößt.
v. Haller.

37. Man kann bey dem Vortrage der schon erfundenen Wahrheiten etwas anders verfahren, als bey der Erforschung solcher, die noch unbekannt sind. Dorten ist es genug, jeden Satz überzeugend darzuthun, ob gleich aus seinem Beweise eben nicht erhellet, wie sein erster Erfinder auf ihn gekommen ist: Hie muß man den Weg zeigen, auf welchem man zu dem gesuchten gelangen kann. Jene Lehrart pflegt man die synthetische, diese die analytische zu nennen. Aus beyden läßt sich eine vermischte zusammensetzen, welche zum Vortrage der Anfangsgründe der Wissenschaften am bequemsten ist.

Die

Die Rechenkunst.

I. Capitel.

Von ganzen Zahlen, Brüchen, und entgegengesetzten Grössen.

1. Erkl. Dinge von einer Art, sind solche, bey denen blos dasjenige betrachtet wird, was sie mit einander gemein haben; z. E. ein Spanier und ein Deutscher, beyde als Europäer betrachtet. Dinge, bey denen man nur das Verschiedene betrachtet, heissen Dinge von verschiedener Art; z. E. eben die beyden betrachtet, in so fern sie zu verschiedenen Nationen Europens gehören.

2. Erkl. Eine Menge von Dingen einer Art, heißt eine ganze Zahl, oder im Anfange dieses Capitels, überhaupt eine Zahl.

3. Anm. Die Dinge, die sich sollen zusammenzählen lassen, oder eine Zahl ausmachen, müssen von einer Art seyn. Drey Spanier und zween Deutsche machen als Spanier und als Deutsche nichts die Zahl Fünf aus; denn es sind weder fünf Spanier noch fünf Deutsche; aber als Europäer machen sie solche aus.

4. Erkl. Dasjenige, was die Dinge, die zusammengezählt werden, gemein haben, heisst die Einheit, und die Zahl ist also eine Menge von Einheiten (2).

Bey der Zahl, Fünfe (5) wäre die Einheit ein Europäer.

5. Erkl. Ein Zahl wird vermehrt oder vermindert, wenn solche Einheiten, aus denen sie besteht, zu ihr gesetzt oder von ihr weggenommen werden.

6. Erkl. Wenn nach Gefallen zu einer Zahl eine oder mehr andere, die jener nicht gleich sind, gesetzt werden, so heisst diese Vermehrung, die Addition; die Zahl aber, welche, allen zusammengenommen, gleich ist, die Summe.

7. Erkl. Eine Zahl zu wiederhohltenmahlen zu sich selbst addiren, heisst sie multipliciren. Was herauskömmt, heisst das Product oder Factum; die Zahl, welche multiplicirt wird, d. i. die man etlichemahl zu sich addirt, und die Zahl, mit der multiplicirt wird, d. i. die, welche anzeigt, wie vielmahl jene addirt wird, heissen gemeinschaftlich, Factoren.

A * * * * B
* * * *
C * * * * D

Wenn die Zahl, die in der Quer-Reihe oder Zeile AB steht, so vielmahl hingesetzt wird als die Zahl anzeigt, die in der lothrechten Reihe AC steht, so entstehet das Product ACDB.

8. Zus. Die Zahl AB ist in dem Producte so vielmahl enthalten, als die Einheit in der Zahl AC. Denn für jede Einheit der Zahl AC, wird die Zahl AB einmahl hingesetzt.

9. Zus.

Digitized by Google

9. Zuſ. So viel Einheiten AC hat, ſo viel Zeilen wie AB kommen unter einander. Die erſte Einheit von AB, die zunächſt bey A ſteht, giebt alſo eine lothrechte Reihe von A nach C, welche ſo viel Einheiten enthält als AC; die zweyte Einheit von AB, mit den unter ihr ſtehenden, giebt eben dergleichen lothrechte Reihe, und ſo jede Einheit von AB ferner. Alſo kommen ſo viel lothrechte Reihen, jede der Zahl AC gleich, ſo viel AB Einheiten hat, und das Product enthält alſo AC ſo vielmahl als die Einheit in AB enthalten iſt.

10. Zuſ. Jeder Factor ſteckt in dem Producte ſo vielmahl als die Einheit in den andern (8; 9) und es iſt einerley, ob AB mit AC oder AC mit AB multiplicirt wird; d. i. einerley Factoren geben mit veränderter Ordnung doch einerley Producte.

11. Erkl. Wenn von einer Zahl eine andere nach Gefallen weggenommen wird, ſo heiſſt dieſes Verfahren die Subtraction, oder das Abziehen. Und was nach weggenommener Zahl übrig bleibt, die Differenz, der Unterſchied, der Ueberſchuß.

12. Zuſ. Der Unterſchied und die weggenommene Zahl zuſammen, machen die Zahl aus, von welcher der Abzug geſchehen iſt.

13. Erkl. Wenn man eine Zahl d

* * * * * d * * * * *
* * * * * Q * * * *
D * * * * *
* * * * *

von einer andern D zu wiederhohltenmahlen so oft abzieht, bis von D nichts mehr vorhanden ist, so heisst dieses Verfahren Dividiren, die Zahl D heisst der Dividendus und d der Divisor; die Zahl Q, welche anzeigt, wie oft der Abzug geschehen kann, heisst der Quotient.

14. Zus. Man stelle sich die Einheiten, welche D ausmachen, in Zeilen, jede von so viel Einheiten als d enthält, gesetzt vor, so wird Q die Menge dieser Zeilen seyn. Für jede Zeile nähmlich, oder für jede d in D, kömmt eine Einheit in Q. Also steckt der Divisor so vielmahl im Dividendus als die Einheit im Quotienten.

15. Zus. Der Dividendus besteht aus so viel Zeilen, d. i. aus so viel gleichgrossen Stücken, so viel Einheiten der Quotient hat, und also ist die Division eine Eintheilung.

16. Zus. Der Divisor, mit dem Quotienten multiplicirt, giebt den Dividendus (14) und ein Product, mit dem einen Factor dividirt, giebt den andern (10).

17. Zus. D und d können so angenommen werden, daß sich D nicht in Zeilen, jede so groß als d abtheilen läßt. Z. E. wenn d aus 13. beybehalten, aber D aus 7 genommen wird, so gäbe das Verfahren (14) folgendes:

* * * * *
* * * * *
* *

Die-

Digitized by Google

Dieſes zeigte alſo, daß d, zweymahl genommen, dieſes D noch nicht ausmacht; dreymahl genommen, aber mehr ausmachen würde. Q muß alſo hie zwiſchen zwey oder drey fallen; was es eigentlich iſt, zu erklären, gehört in die Lehre von den Brüchen.

18. Zuſ. Alle Veränderungen ganzer Zahlen geſchehen auf eine der erzählten vier Arten (6. 7. 11. 13.) dieſes ſind die Species der Rechenkunſt.

19. Willk. Satz. Man gebe jeder der erſten zehn Zahlen einen eigenen Nahmen; Jede gröſſere Zahl iſt entweder die Summe einer kleinern und der Zehn, oder ein Vielfaches der Zehn; oder die Summe eines Vielfachen und einer kleinern; und dieſe Mannichfaltigkeit zeige man durch die verſchiedene Art ihre Nahmen zu bilden an; z. E. Neunzehn; Neunzig; Neun und neunzig: Die Unbequemlichkeit und Verwirrung zu vermeiden, welche die allzuöftere Wiederhohlung eines Tons verurſachen würde, nenne man zehnmahl zehn, Hundert; Zehnmahl hundert, Tauſend; Tauſendmahl tauſend, Million; Millionmahl Million, Billion; Millionmahl Billion, Trillion; Millionmahl Trillion, Quadrillion u. ſ. f.

20. Anm. Die Nahmen der Zahlen, die jeder in den Sprachen weiß, die er verſteht, ſind nicht nöthig herzuſetzen. Der Kunſtgriff aber, eine ſo groſſe Menge von Begriffen, als die Mannichfaltigkeit der Zahlen enthält, mit ſo wenig Zeichen auszudrücken, verdient Aufmerkſamkeit, und iſt eine Probe der Zeichenkunſt (ars characteriſtica); welche Betrachtungen über die Art, die Gedanken durch bequeme Zeichen anzudeuten, über die Kunſtwörter in den Wiſſenſchaften (Leibnit. Praef. ad Nizol. Antibarbarum) und über die Beſchaffenheit der Sprachen, welche zum Vortrage der Wiſ-

Digitized by Google

senschaften bequem seyn sollen (Stevin. Geograph. L. I. def. 6.) veranlassen. Ich habe von Leibnizens und Stevins Gedanken Auszüge gegeben: Der Deutschen Gesellschaft in Leipzig Nachrichten und Anmerkungen, Leipz. 1744; vier Stück; 467 und 605 Seite.

21. Anm. Es wäre nicht nothwendig, bis auf 10 zu zählen, sondern es lassen sich so vielerley Arten zu zählen, so viel Zahlen sind, erdenken. Hieher gehören Leibnizens Arithmetica Dyadica, u. d. g.

22. Zus. Zehn einzelne Einheiten machen eine zusammengesetzte aus, die man zehn nennt; zehn Zehnen, wieder eine neue zusammengesetzte, die Hundert heisst, u. s. w. Diese zusammengesetzte Einheiten kann man nach Ordnungen unterscheiden, die Zehnen machen die erste Ordnung aus, die Hunderte die zweyte, u. s. w. begreift die Einheit jeder höhern Ordnung, zehn Einheiten der nächstniedrigern in sich.

23. Zus. Also kann jede der bekannten Zifern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, verschiedene Zahlen bedeuten, nachdem sie sich auf Einheiten verschiedener Art bezieht. Man muß aber ein Merkmahl haben, zu erkennen, auf was für Einheiten sie sich bezieht.

24. Willk. Satz. Dieses Merkmahl soll die Stelle der Zifer geben. Eine Zifer allein bedeutet eine Menge einzelner Einheiten, und heisst ein Einer. Für eine Zifer, die die zweyte Stelle von der rechten Hand gegen die linke einnimmt, ist die Einheit Zehn, und die Zifer heisst ein Zehner. In der dritten, vierten, fünften Stelle stehn Hunderter, Tausender, Zehntausender; und so wird die Einheit jeder Zifer zehnmahl grösser, wenn sie nach der linken Hand zu,

eine

eine Stelle weiter rückt. Sind von einer gewiſſen Ordnung (22) keine Einheiten vorhanden, aber welche von höhern Ordnungen, ſo füllt man die Stelle der fehlenden mit der o aus. Man kann die Zifern in Ordnungen wie die Einheiten abtheilen, auf die ſie ſich beziehen.

25. Anm. Nach Zehnen zu zählen, iſt den meiſten Völkern gemein geweſen; Schon beym Ariſtoteles Probl. Sect. 12 iſt die 3 Frage, warum alle Völker, Barbarn und Griechen, bis auf 10 zählen, Thracier ausgenommen, die nicht über 4 zählen können. Nach mehr ſpitzfündigen Urſachen giebt er erſt die natürlichſte, die Zahl der Finger. Blancani Loca Ariſtotelis mathematica. Bonon. 1615. n. 339.

Zuſammenſetzungen nach Zehnen wie (22) haben auch wohl eigne Nahmen bekommen, Dekaden, Hekatontaden, Chiliaden, Myriaden. Archimed von der Sandrechnung hat dieſe Zuſammenſetzung für die groſſen Zahlen, die er brauchte, weit getrieben. Αρχιμηδες ψαμμιτης von Walliſius herausgegeben. Io. Walliſ. Op. Vol. Tertium Oxon. 1699. fol. p. 513. Archimedis Sandrechnung ... von Joh. Chriſtoph Sturm, Nürnb. 1667. Fol.

Von unſern Zifern bedeutet jede ihrer Figur gemäß, eine gewiſſe Menge von Einheiten, z. E. 3 allemahl drey. Aber was jede dieſer Einheiten für einen Werth hat, Eins, Zehn, Hundert ... das zeigt ihre Stelle an. In folgender Zahl 3456 bedeutet die höchſte Zifer nicht eigentlich: Dreytauſend, ſondern drey Einheiten, deren jede Tauſend iſt.

Solche Figuren nun, deren jede eine gewiſſe Menge Einheiten, aber ihrer Stelle nach Einheiten von andrer und andrer Ordnung bedeutet, findet man weder beym Archimed, noch bey ältern Griechiſchen und Römiſchen Schriftſtellern.

Will man den Werth der Einheiten beſtimmen, ſo muß man von der Stelle zur rechten Hand anfangen

gen und immer nach der linken fortgehn. Diese Zahlenschrift wird also von der rechten gegen die linke gelesen, wie morgenländische Schriften. Das zeigt ihre Abkunft zulänglich an.

Ob eine Zifer immer eben die Figur habe, die wir ihr geben, darauf kömmt nichts an, werden doch einerley Buchstaben, von unterschiednen Händen und in unterschiednen Jahrhunderten unterschiedlich gebildet. Das Wesentliche ist, daß eine und dieselbe Figur, an unterschiednen Stellen, immer gleichviel Einheiten, aber Einheiten von anderm Werthe bedeutet.

So findet man mancherley gebildete Zifern der Morgenländer in Reisebeschreibungen. Tavernier R. II. Th. 1. B. 2. C. Niebuhr Beschreibung von Arabien 102 S. 13 T. wo 10 eine eigne Figur hat, Nieb. Reiseb. II. B. Tab. II. A. 21 S. Observations physiques et mathematiques envoyées des Indes et de la Chine à l'Ac. R. des Sc. par les Pères Jesuites p. 74. Finden sich bey den Mem. de Math. et de Phys. de l'Ac. des Sc. Par. 1692; 4. Kehr Mogolis M. Aurenk Szeb Numisma. Lipſ. 1725.

In Abendländischen Schriften, findet man nicht leicht sichere Denkmahle von dem Gebrauche dieser Zifern, als etwa um 1200.

Wallisius, Algebra cap. 3; 4; Oper. Io. Wallis Oxon. 1695; Vol. II. *Weidler* de characteribus numeror. vulgaribus et eor. aetatibus, Witeb. 1727. Eiusd. Spicilegium observationum ad histor. notar. numeralium. Viteb. 1755. *Gatterer* Elementa artis diplomaticae S. I. c. 4. §. 66; 67; Tab. III. Gegen den Gedanken, daß die Zifern aus Griechischen Buchstaben entstanden wären, ein Aufsatz von mir Neue philologische Bibliothek III. B. 1. St.

Die Leute, welche unsere Zifern nicht brauchten, rechneten doch nach Zehnen vermittelst des Rechenbretes (abacus). Merkmahle der Einheiten, wie etwa Stein-

Digitized by Google

Steinchen vorstellen konnten (höhere calculus) auf die oder jene parallele Linien gelegt, bekamen eben so höhere Werthe, wie die Einheiten unserer Ziffern von ihren Stellen.

Alle Rechenbücher des 16. Jahrhunderts lehren dieses unter dem Nahmen des Rechnens auf der Linie, unseres heißt: Rechnen mit der Feder. Die Zahlpfennige oder Rechenpfennige wurden auf einen Tisch oder eine Rechenbank gelegt, daher noch die Nahmen Bank und Banquier.

Ein newgeordnet künstlich Rechenbüchlin Jacob Köbels Stattschreiber zu Oppenheim. Auff den Linien vnd Spacien mit Rechenpfennigen . . . 1531. 8. Rechnung nach der lenge auff den Linihen vnd Federn durch Adam Riesen. 1550. 4.

Schottus im Cursu Mathem. Würzb. 1661. fol. Lib. II. p. 57 u. f. lehrt diese Rechnungsart umständlich. Sie ist noch bey den Sinesern und Russen gewöhnlich. Das Chinesische Rechenbret findet man aus Du Haldes Beschreibung von China, in der Allgemeinen Historie der Reisen VI. Band. Leipz. 1750. 230 S. Das Russische, bey Peter von Havens Reise in Rußland, aus dem Dän. Copenh. 1744.

Aus Schotts Buche erhellt, daß dieses Rechnen noch spät im vorigen Jahrhunderte üblich gewesen. Auch Christian Scriverii veranlaßte es eine erbauliche Betrachtung in Gottholds zufälligen Andachten. Leipz. 1679. III. Hundert 49. Nothwendig war es in Zeiten, da Schreiben wenig bekannt war. Daß Ziffern, Zahlenschrift sind, verursachte die Verbindung von ein paar Nahmen, die sonst eben nicht nothwendig beysammen seyn müssen: Schreib- und Rechenmeister.

Ich sollte glauben, es wäre gut, Kinder zuerst im Rechnen auf den Linien zu unterrichten. Der abstracte Begriff von Einheiten, die immer zehnfach wachsen, ließe sich so sinnlich machen, und das Hin-

und

und Herlegen der Zahlpfennige wäre eine Art von Beschäfftigung, darauf sie williger merken würden, als auf das Schreiben der Zifern. Nach einiger Uebung darinn würden sie gewiß die Zifern mit mehr Verstande brauchen.

26. Zus. Wenn sechs Zifern beysammen stehen, so beziehen sie sich auf Eins, Zehn, Hundert, Tausend, Zehntausend, Hunderttausend. So viel Zifern, oder weniger kann jeder in der Sprache aussprechen, die er versteht, oder eine Zahl, die nur so viel Zifern erfodert, schreiben, wenn sie ihm mit Worten gesagt wird.

Aufgabe.

27. Eine Zahl, die mit Zifern geschrieben wird, mit Worten auszusprechen.

Auflös. Man theile die Zifern in Classen, von der rechten Hand gegen die linke, deren jede Classe sechs Zifern bekömmt; die am weitesten zur linken steht, kann weniger haben. Die Zifern jeder Classe spreche man nach (28) aus, und sage nach der ersten Classe, die am weitesten zur rechten Hand steht, Eins, nach der zweyten, dritten, vierten, fünften, sechsten u. s. f. Classe Millionen, Billionen, Trillionen, Quadrillionen, Quinquillionen, u. s. f. da man sich denn auch, dem Gedächtnisse zu Hülfe zu kommen, die Millionen mit einem Striche, die Billionen mit zweenen, u. s. w. andeuten kann.

Exempel. $83'''\,403'\,78''\,'\,73084'\,670243$ dieses wird heissen: drey und achtzig Trillionen, vier hundert und drey tausend, fünf hundert und

acht

acht und siebenzig Billionen; fünf hundert und drey und siebenzig tausend, fein hundert und vier, und achtzig Millionen, sechs hundert und siebenzig tausend, zwey hundert und drey und vierzig mahl Eins.

Beweis. In jeder Classe kann jede Zifer als eine Menge von Einheiten der niedrigsten Zifer in selbiger Classe ausgesprochen werden; z. E. die 7 der zweyten Classe bedeutet siebenzig tausend solche Einheiten, dergleichen die 4 eben dieser Classe, vier, bedeutet. Daß aber die niedrigsten Zifern der Classen, zu ihren Einheiten nach der gemachten Abtheilung, schlechte Einheiten, Millionen, Billionen, u. s. f. haben, erhellet aus 22. und 19. Jede Einheit nähmlich, die sechs Ordnungen höher ist als eine andere, gilt eine Millionmahl mehr, und eine Zifer, die sechs Stellen höher steht als eine andere, bezieht sich eben so auf Einheiten, die eine Millionmahl mehr sind als die Einheiten der niedrigern (24).

28. Anm. Die Eins bey der niedrigsten Classe ist nicht nöthig auszusprechen. Zuweilen deutet man die Ordnung der Zifern (24) durch kleine Zifern an, die man darüber schreibt. So würde die niedrigste Classe des Exempels folgendermaßen aussehen

$$\overset{5}{6}\ \overset{4}{7}\ \overset{3}{0}\ \overset{2}{2}\ \overset{1}{3}\ 4$$

dieses dient, grosse Zahlen zu schreiben, ohne daß man so viel Zifern oder Nullen braucht als sonst nöthig wäre; z. E. 25^{42} heißt 25 Septillionen, und bedeutet, daß 42 Nullen rechter Hand der Zifern 25 stehen sollten. Be-

bri-

brigens ist bey einer Zahl, die mit verschiedenen Ziffern geschrieben wird, die Zahl der Ordnungen um eins geringer als die Zahl der Ziffern, weil die erste Ordnung der Zehner, zwo Ziffern, und so jede Ordnung eine Ziffer mehr erfodert.

29. Zus. Eine Zahl, die mit Worten vorgesagt wird, mit Ziffern zu schreiben, schreibe man für jede Menge von Einheiten einer gewissen Ordnung die gehörige Ziffer, in die gehörige Stelle, welches nicht eher vollendet werden kann, als bis die Zahl völlig hergesagt ist, weil wir die Ziffern nach unserer Gewohnheit, aber der Gewohnheit ihrer Erfinder zuwieder (25) von der linken gegen die rechte lesen.

30. Anm. Satz. Die Zeichen der arithmetischen Arbeiten sind folgende, Der Addition +, der Subtraction —, der Multiplication ., und der Division :, der Gleichheit aber =; z. E. 3 + 4 = 7; 9 — 5 = 4; 3. 7 = 21; 12 : 3 = 4; bezieht sich eine Arbeit zugleich auf verschiedene Zahlen, so schliesst man sie zusammen in eine Parenthesis ein. Z. E. (7 + 6 — [12 — 5]). 8 : (5 + 7) = 4. Einige bedienen sich für die Multiplication auch des Andreaskreuzes, z. E. 5 X 4 = 20. Noch ein Zeichen der Division kömmt unten (61) vor. Daß eine Grösse, mehr als die andere sey, wird durch nachstehendes Zeichen angedeutet, dessen Oeffnung sich nach der grössten, die Spitze nach der kleinsten kehret. 8 > 5.

Aufgabe.

31. Verschiedene Zahlen zusammen zu addiren.

Aufl.

Digitized by Google

Aufsch.		
678345	A	I) Man schreibe die Zahlen, die man addiren will, so unter einander, daß Ziffern einerley Ordnung (24) unter einander kommen, wie A, B, C, im Exempel.
5321	B	
4894	C	
10	D	
15	E	
14	F	II) Man zähle die Ziffern zusammen, die in einer Reihe unter einander stehen, und schreibe die niedrigste Ziffer jeder solcher Summe, unter die Reihe, von welcher die Summe herrühret, wie D, E, F, G, H.
17	G	
67	H	
688560	I	

III) Diese einzelnen Summen addire man wieder auf eben die Art, die völlige Summe I zu erhalten.

Bew. Man addirt solchergestalt alle Theile der Zahlen A, B, C, zusammen; also bekömmt man ihre Summe (Vorerinn. 8.) und weil man nach I) allemahl Theile, die einerley Einheiten haben, zusammenzählet, so braucht man währenden Zusammenzählens an die Einheiten jeder Reihe nicht zu denken, welche sich von selbst durch II. geben.

32. Anm. I) wird erfüllt, wenn man nur die Einer unter die Einer schreibt (24) d. i. wenn sich die Zahlen alle, rechter Hand gerade unter einander anfangen.

33. Anm. So oft die Summe einer Reihe mehr als 9 beträgt, wird für jede Zehne eine Eins in die

nächst höhere Stelle geschrieben. Darauf gründet sich die Probe des Addirens durch Wegwerfen der 9.

34. Anm. Man kann von jeder Summe wie D, E, u. s. f. die höhere Zifer gleich in Gedanken zu der niedrigsten der folgenden Summe addiren, und also die Summe I auf einmahl finden, ohne die einzelnen hingeschrieben zu haben.

Aufgabe.

35. Eine kleine Zahl von einer grossen abzuziehen.

Aufl. I) Man schreibe die Zahlen wie 31 I)

II) Man nehme jede Zifer der abzuziehenden Zahl B, von der darüber stehenden der Zahl A weg.

III) Wenn dieses nicht angeht, so stelle man sich vor, die nächst höhere Zifer der Zahl, von welcher der Abzug geschehen soll, werde um eine Einheit vermindert, und diese Einheit zu der Zifer gebracht, von welcher man eine darunterstehende grössere abziehen sollte, so gilt die geborgte Einheit da 10; wie bey C wenn man eine Einheit von 3 in die Stelle der 2 bringt, dieses so viel ist, als wenn daselbst 12 stünde. Da nun die Zifer, die man abziehen soll, nie über 9 ist, so kann man den Abzug allemahl verrichten, und muß bey der Zifer, wo man geborgt hat, ein Zeichen, etwa einen Punct, machen.

3467	A
254	B
3213	
4. 3. 2	C
1 6 7	D
2 6 5	

IIII.

Digitized by Google

III. Wenn die nächst höhere Stelle oder einige der nächst höhern mit Nullen ausgefüllt sind, so borget man bey der ersten höhern Zifer, wo es angeht, verfährt mit der daselbst weggenommenen Einheit bey der Zifer, von welcher der Abzug einer gröſſern geschehen sollte, nach III) und sieht die dazwischen liegenden Nullen an, als wären sie alle in Neunen verwandelt.

7:0004 E
4 23:56 F
2 7648

Bew. II) ist offenbahr, weil solchergestalt die Theile der Zahl B einzeln von den Theilen der Zahl A weggenommen werden. III) Gründet sich darauf, daß man (nach Vorerinn. 8) eine Zahl aus ihren Theilen verschiedentlich zusammensetzen kann, wenn man sie nur alle behält; also liesse sich C so schreiben,

300
120
12

da könnte man denn bey der Zahl D, 7 von 12; Sechs Zehner von Zwölf Zehnern; und einen Hunderter von dreyen wegnehmen. Wenn man über eine Null borget, so muß die geborgte Einheit zuerst in die Stelle der 0 gebracht werden, die der Zifer von welcher man borget, zunächst rechter Hand stehet, welches so viel wäre, als ob 10 in der Stelle dieser 0 stünde. Befindet sich nun rechter Hand der erwähnten 0, noch eine, so nimmt man von der erhaltenen 10 eine

Digitized by Google

Eins weg, diese 0 in 10 zu verwandeln, daß also dorten 9 stehen bleibt, und so geht es fort bis an die Ziser, für die man geborgt hat.

Anm. Die Addition und Subtraction, dienen einander gegenseitig zu Proben (12).

Aufgabe.

36. Alle Producte zu finden, die herauskommen, wenn man zwo Zahlen, deren jede mit einer Ziser geschrieben wird, mit einander multipliciret. Oder das Einmahl Eins zu verfertigen.

Auflös. Man addire jede solche Zahl, zu sich selbst, so hat man ihr Doppeltes, und zu ihrem Doppelten, so hat man ihr Dreyfaches, und zu ihrem Dreyfachen, so hat man ihr Vierfaches u. s. w. welches man nur bis auf das Neunfache fortzusetzen braucht. Wenn man diese Producte unter die Zahlen, von denen sie herrühren, und neben die Zahlen, welche das Vielfache anzeigen, schreibet, so erhält man eine Tafel, wo man jedes Product zweymahl, jedesmahl in dem Fache antrifft, das sich unter dem einen Factor, und neben dem andern befindet.

Digitized by Google

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

37. Zuſ. Wenn eine Ziſer einer höhern Ordnung mit einem Einer multiplicirt wird, ſo iſt das Product von der Ordnung des höhern Factors; denn es iſt derſelbe ſo vielmahl genommen als der Einer anzeigt. Z. E. 9000. 7 = 9. 7. 1000 = 63000.

38. Zuſ. Iſt der andere Factor auch eine höhere Ziſer ſo wird dadurch das Product ohnſtreitig ſo vielmahl höher als es wäre, wenn dieſer Factor ein Einer wäre, ſo vielmahl der Factor höher iſt. Z. E. eine Zahl mit 3000 multiplicirt, iſt ohnſtreitig 1000 mahl ſo viel als mit 3 multiplicirt. Folglich iſt 9000. 700 ohnſtreitig 100 mahl ſo viel als 9000. 7. Eine Ziſer wird aber um ſo viel Ordnungen erhöhet, ſo viel man Nullen zu ihrer Rechten ſchreibt (24) alſo müſſen die Nullen, die an der 7 zur Rechten

Digitized by Google

stehen, noch an das Product 900. 7 geschrieben werden. Das Product 9000. 7. aber war 9. 7 mit so viel Nullen als an der 9 stunden, (37) also ist 9000. 700 so viel als 9. 7 mit so viel Nullen als an der 9 und an der 7 zusammen stehen. Das ist, zwo Zifern, deren jede Nullen zur rechten Hand hat, multipliciren, heisst die beyden Zifern als Einer multipliciren, und an das Product rechter Hand so viel Nullen schreiben, als an beyden Zifern zusammen stunden. Oder die Ordnung des Products zwoer Zifern höherer Ordnungen wird gefunden, wenn man ihre beyden Ordnungen zusammen rechnet

(24). Z. E. $5^{7}.3^{4}=15^{11}$. Dieses zeigt, wie das Einmahleins alle Zahlen zu multipliciren zulänglich ist.

Anm. Pappi Alexandrini Collectiones Mathematicae von Federico Commandino 1589 fol. lateinisch übersetzt herausgegeben, fangen mit dem dritten Buche an, und enthalten lauter geometrische Untersuchungen. Wallis hat aus einem Manuscripte, ein Stück vom zweyten Buche bis an desselben Ende zuerst griechisch und lateinisch 1688 herausgegeben, es ist auch in Io. Wallis. Op. T. II. p. 595. zu finden. Eine Reihe von Sätzen 13 ... 27 lehrt fast nichts weiter als was hie in 37; 38; enthalten ist; Eine Probe wie viel Vorzug die Zifern unsrer Rechnung vor dieser ältern geben.

Aufgabe.

39. Zwo Zahlen mit einander zu multipliciren.

I. Fall.

Digitized by Google

I. Fall. Wenn ein Factor B nur eine Ziffer hat. Man multiplicire jede Ziffer von A durch B, vermittelst des Einmahleins (36) und schreibe die niedrigste Ziffer jedes Products unter die Ziffer von A, von der es herrührt (37); Ferner addire man die einzelnen Producte, so ist

34785	A
9	B
45	C
72	D
63	E
36	F
27	G
313065	H

C+D+E+F+G=H=A.B

II. Fall. Wenn der andere Factor wie L mehr Ziffern hat, so verfahre man mit jeder nach dem ersten Falle, und rechne die einzelnen Producte wie C, D, E, F, G, in Gedanken zusammen, daß man sogleich das ganze M hinschreiben kann. Jedes dieser ganzen Producte aber von K durch eine Ziffer von L schreibe man so, daß seine niedrigste Ziffer, unter der Ziffer von L stehet, von der es herrührt (38). Ist statt dieser Ziffer eine 0, so braucht man wie bey P nur unter sie eine 0 zu schreiben und das Product aus der nächst höhern Ziffer von L in K (aus der 2) in eben die Zeile (P) unter dieser nächst höhern Ziffer anzufangen. Zuletzt ist

34785	=K
20469	=L
313065	M
208710	N
139140	O
69570	P
712014165	=Q

M+N+O+P=Q=L.K

Aufgabe.

40. Zwo Zahlen mit-einander zu dividiren. Ich nehme an, daß der Divisor kleiner ist als der Dividendus.

Aufl. I. Fall. Wenn der Divisor nur eine Zifer hat

B	A	C	
5	97645	10000	D
	5	9000	E
	47645	500	F
	45	20	G
	2645	9	H
	25		
	145		
	100		
	45		
	45		
	0		

I) Man suche, wie vielmahl der Divisor in der höchsten Zifer des Dividendi enthalten ist. Dieses geschieht, indem man aus dem Einmahleins die Zifer aufsuchet, welche mit dem Divisor multiplicirt, ein Product giebt, das der höchsten Zifer des Dividendus gleich, oder zunächst kleiner ist.

II) Diese Zifer schreibe man in die Stelle des Quotienten, und nach ihr so viel Nullen als Zifern im Divisor nach der höchsten folgen, wie bey D.

III) Dieser gefundene Theil des Quotienten zeigt nehmlich an, wie vielmahl der Divisor nach solchen Einheiten im Dividendus enthalten sey, wie die Einheiten der höchsten Zifer des Dividendus sind; z. E. wie viel Zehntausende des Divisors

Digitized by Google

visor in Dividendus stecken. Weil also in der höchsten Zifer des Dividendus noch Mengen des Divisors stecken können, die nicht durch so grosse Einheiten wie die nur erwähnten auszudrücken sind, so multiplicire man

VI) den gefundenen Theil des Quotienten D mit dem Divisor (5) und ziehe das Product von der Zifer des Dividendus in die man dividirt hat (9) ab. Man braucht weder an das Product noch an den Rest die Nullen, die bey D stehen, zu schreiben, weil diese Zifern schon von ihren Stellen den gehörigen Werth bekommen, daß es so viel ist als ob Nullen zu ihrer Rechten stünden.

VII) Zu dem Reste nehme man die nächstfolgende Zifer, und verfahre mit dem, was man solchergestalt erhält, nach der I. Regel, die Zifer, die herauskömmt, ist der zweyte Theil des Quotienten, und nach ihr gehören so viel Nullen als Zifern im Dividendus nach der niedrigsten unter denen in welche man dividirt hat (7) folgen; (E)

VIII) Man verfahre mit E wie mit D in der IIII. Reg. und mit dem Reste nach der fünften Regel, welche Arbeit so lange fortgesetzt wird als Zifern im Dividendus vorhanden sind. Jede neue Zifer des Dividendus, die zu dem nächstvorhergehenden Reste genommen wird, giebt im Quotienten eine Zifer, nach der so viel Nullen folgen, so viel Zifern nach dieser Zifer im Dividendus zur rechten Hand stunden.

VII) Weil diese Nullen nur dienen den Werth der Zifern des Dividendus anzuzeigen, so hat man sie bey der Ausübung nicht nöthig, weil die verschiedenen Zifern des Dividendus nach einander selbst diese Stellen ausfüllen; z. E. der Quotient D + E + F + G + H wird zusammen 19529.

VIII) Wenn der Divisor in der höchsten Zifer des Dividendus nicht einmahl enthalten ist, so nimmt man sie zu der nachfolgenden, und wann er in dem Reste und der dazu kommenden neuen Zifer nicht enthalten ist, so schreibt man dafür eine o in den Quotienten und nimmt zu dieser Zifer des Dividendus die nächstfolgende:

7	6314	902
	63	
	014	
	14	
	0	

VIII) Der Beweis von diesem allen ist offenbahr, und gründet sich darauf, daß man die Theile des Quotienten suchet, wie sie sich nach und nach durch Zifern auf die Art ausdrucken lassen, wie der Divisor und Dividend selbst ausgedruckt sind.

X) II. Fall. Wenn der Divisor mehr als eine Zifer hat, so vergleicht man den Divisor

L	M	N
37	7654	206
	74	
	254 O	
	222	
	32 P	

nach obigen Regeln allemahl mit so viel Zifern des Dividendus als er selbst hat.

XI) Diese Vergleichung anzustellen, und z. E. zu finden, wie vielmahl 37 in 76 steckt,

Digitized by Google

steckt, könnte man vorläufig 37 durch alle Zahlen von 1 bis 9 multipliciren, und also ein Einmahleins für den Divisor machen, welches Verfahren in der That, wenn der Divisor groß ist, einige Bequemlichkeit bringt, und von Ludolfen ist vorgeschlagen worden, ohne das Einmahleins zu dividiren.

XII. Auser dem aber, sucht man nur, wie vielmahl die erste Zifer des Divisors in der ersten des Dividendus steckt, und nimmt an, der ganze Divisor stecke eben so vielmahl in den ihm zugehörigen Zifern des Dividendus. Dieses kann falsch seyn, wie bey O; aber das entdeckt sich durch die IIII. Regel, da das Product grösser kommen wird als die Zahl, von der man es abziehen soll. Man muß also den Theil des Quotienten, der solchergestalt gefunden werden soll, so lange vermindern, bis das Product aus ihm in den Divisor sich abziehen läßt, die Regel dieses 12. Abs. kann nähmlich den Quotienten allzugroß, aber nie zu klein geben.

XIII. Wenn etwas übrig bleibt, wie P, so enthält der Dividendus den Divisor einigemahl ganz, und noch etwas von ihm darüber, welches keinen ganzen Divisor beträgt. Dieses wird sich erst unten erklären lassen (61).

XIIII. Anm. Diese Art zu dividiren, nennt man unter sich dividiren. Alle Producte werden dabey ordentlich hingeschrieben, man kann also Fehler in Machung der Producte oder im Abziehen leicht vermeiden und entdecken. Auch hat man das Product schon

Digitized by Google

schon vor Augen, wenn einerley Zifer im Quotienten zu wiederhohltenmahlen vorkömmt. Dadurch erhält dieses Verfahren grosse Vorzüge vor dem Dividiren über sich, da man die Producte in Gedanken macht und abzieht.

XV. Wenn nichts übrig bleibt, so fliesst die Probe der Division aus (16).

41. Anm. Die geschickte Art, die Zahlen mit den Zifern zu bezeichnen, bringt durchgehends den Vortheil, daß man an den Werth der Zifern währender Arbeit nicht denken darf, weil sich solcher durch ihre Stellen giebt, diese aber durch die Regeln, denen man blindlings folgen kann, auch wenn man ihren Grund nicht verstünde, bestimmt werden.

42. Anm. Im gemeinen Leben, im Handel, in Künsten und Wissenschaften theilt man die grössern Einheiten auf verschiedene Arten in kleinere ein. Die Rechnung damit heisst man, in genannten Zahlen. Sie erfodert weiter keine neuen Regeln, als daß man weiß, wie viel kleinere Einheiten auf jede nächstgrössere gehen.

Von den Potenzen.

43. Erkl. Ein Product aus zween gleichen Factoren heisst ein Quadrat, und der Factor, der mit sich selbst multiplicirt wird, dessen Wurzel, z. E. $9 = 3.3$

44. Erkl. Das Quadrat mit seiner Wurzel multiplicirt, giebt den Würfel, ein Product aus drey gleichen Factoren, deren jeder hie die Cubikwurzel heisst

$$16.4 = 4.4.4 = 64$$

45. Erkl. Ein Product aus lauter gleichen Factoren, heisst eine Potenz des Factors, der in diesem Producte etlichemahl mit sich selbst multiplicirt

plicirt wird. Der Grad der Potenz heisst die Menge von gleichen Factoren; und die Wurzel heisst einer dieser Factoren.

46. Willk. Satz. Man schreibt eine Potenz so, daß man oben an die Zifer, welche die Wurzel andeutet, eine kleine Zifer setzet, welche den Grad der Potenz anzeigt, und der Exponent heisst.

Die Exempel 43. 44. sehen so aus:

$9 = 3^2$; $64 = 4^3$

So ist $625 = 5.5.5.5 = 5^4$, welche Potenz die vierte, oder das Biquadrat heisst. Imgleichen ist eine Million, die sechste Potenz der 10 oder $= 10^6$

So lassen sich alle Potenzen, so hoch sie auch steigen, bequem bezeichnen. Die sehr zusammengesetzten Benennungen und Bezeichnungen der Rechenmeister, sind jezo nur als Antiquität merkwürdig. Martini getreuer arithmetischer Wegweiser, Berlin 1741; 494 S. Marpurg, Progressional calcul Berlin 1774; 40. S.

47. Erkl. Die Wurzel eines gewissen Grades aus einer Zahl ziehen, heisst diese Zahl als eine Potenz selbigen Grades ansehen, und die Zahl suchen, die, so vielmahl mit sich selbst multiplicirt als der Grad der Potenz erfodert, die gegebene Zahl hervorbringt.

48. Willk. Satz. Das Zeichen der Wurzel ist $\sqrt{}$ und man schreibt den Exponenten der Wurzel in die Oefnung des Wurzelzeichens, bey dem Quadrate aber, da er 2 seyn sollte, lässt man ihn weg.

$\sqrt[3]{9} = 3$; $\sqrt[4]{64} = 4$; $\sqrt[6]{625} = 5$; $\sqrt{1000000} = 10$

49. Zus.

49. Zus. Der einzelnen Ziffern Quadrate stehen im Einmahleins, und ihre Würfel lassen sich daraus leicht machen. Dieses giebt folgendes Quadrat- und Cubiktäfelchen.

Wurzeln	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quadrate	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Würfel	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

50. Zus. Wenn an einer oder mehr Ziffern rechter Hand Nullen stehen, so ist ihr Quadrat, das Quadrat der Ziffern mit noch einmahl so viel Nullen, und ihr Würfel, der Würfel der Ziffern mit dreymahl so viel Nullen, oder, das Quadrat und der Cubus einer Zahl von gewisser Ordnung, sind das Quadrat und der Cubus dieser Zahl blos als einer Menge von Einern betrachtet, aber auf die doppelte oder dreyfache Ordnung erhöhet (38).

$$500^2 = 250000 \qquad (7)^3 = 7^{\overset{12}{3}}$$

51. Zus. Bey einer Zahl, die nach (27) geschrieben ist, kann man jede Ziffer als einen schlechten Einer ansehen, der in die Potenz der Zehne multiplicirt wäre, deren Exponent die Ordnung der Ziffer (38) anzeigt.

$$64327 = 6.10^4 + 4.10^3 + 3.10^2 + 2,10^1 + 7$$

Von den Brüchen.

52. Erkl. Wenn ein Ganzes in etliche gleiche Theile getheilt wird, und deren einige genommen werden, so heisst dieses Stück, in Vergleichung mit dem Ganzen betrachtet, ein Bruch. Z. E. Ein Gulden enthält zwey Drittheile des Thalers.

53.

Digitized by Google

53. Zuſ. Alſo muß man wiſſen, in wie viel Theile das Ganze iſt getheilt worden, und wie viel deren auf den Bruch gehen. Das erſte zeigt der Nenner (denominator) (drey), das letzte der Zähler (numerator) (zwey) an. Jener giebt dem Bruche den Nahmen; dieſer zählet die Menge der Theile, die ihn ausmachen. Nimmt man einen dieſer Theile für die Einheit an, ſo wird der Bruch eine ganze Zahl, die ſo viel ſolche Einheiten hat, als der vorige Zähler anzeigte.

54. Willk. Satz. Man ſchreibe den Zähler oben, und den Nenner unten, zwiſchen beyde einen Strich, $\frac{2}{3}$.

55. Zuſ. Wenn der Bruch kleiner als das Ganze iſt, ſo iſt er ein ſo groſſes Stücke des Ganzen, ſo ein groſſes Stücke ſein Zähler von ſeinem Nenner iſt.

56. Zuſ. Man kann ſo viel Theile, oder auch mehr nehmen, als das Ganze einmahl ausmachen; z. E. $\frac{4}{4}$ oder $\frac{17}{3}$; In dieſem Falle begreift der Bruch das Ganze einmahl, oder etlichemahl, oder etlichemahl und noch ein Stück deſſelben darüber in ſich.

57. Erkl. Brüche wie (55), heiſſen eigentliche (verae), wie (56) uneigentliche, Baſtardbrüche (ſpuriae).

58. Zuſ. Eine groſſe ganze Zahl (12) kann nicht in einer kleinen ganzen (7) ſtecken; aber ein Stück der groſſen Zahl wird die kleine ausmachen. Wie viel dieſes Stück betrage, findet man

man so: Man theilt jede Zahl in ihre Einheiten, und fragt, wie viel Einheiten der grossen Zahl die kleine ausmachen. Die kleine Zahl begreift solchergestalt etliche Einheiten, als Theile der grossen in sich, und kann als ein Bruch von der grossen angesehen werden, dessen Nenner die Menge der Einheiten der grossen Zahl, und der Zähler die Menge der Einheiten der kleinen Zahl ist. ($\frac{1}{12}$) Dieser Bruch zeigt also an, was für ein Stück der grossen Zahl in der kleinen enthalten ist. Er ist also der Quotient, den die kleine Zahl mit der grossen dividirt giebt, bey welcher Division man nicht fragen kann, wie vielmahl die grosse Zahl, sondern was für ein Theil der grossen Zahl in der kleinen enthalten ist, obgleich der Sprachgebrauch auch verstattet, die Frage durch $\frac{1}{2}$mahl, $\frac{8}{4}$mahl u. s. w. zu beantworten.

59. Zus. Ein uneigentlicher Bruch, begreift das Ganze so vielmahl in sich, so vielmahl sein Zähler den Nenner in sich begreift, und ist also der Quotient, den der Zähler mit dem Nenner dividirt giebt.

60. Zus. Wenn der Zähler den Nenner etlichemahl ganz, und noch ein Stück darüber enthält, so lässt sich solches Stück nach 58 ausdrucken; ($\frac{17}{3} = \frac{15}{3} + \frac{2}{3} = 5 + \frac{2}{3}$). Da nun die Brüche und Quotienten einerley sind, (58; 59) so erhellet, was, den Quotienten zweyer ganzen Zahlen zu finden, geschehen muß, wenn sich der Umstand des XIII. Abs. des 40 §. ereignet.

Digitized by Google

net. Man sucht nähmlich den Quotienten so genau man kann in ganzen Zahlen, und hänket daran einen Bruch, dessen Zähler der Rest wie a. a. O. und der Nenner der Divisor ist. So ist $7654:37 = 206 + \frac{32}{37}$ (58).

61. Zus. Es ist erlaubt, die Quotienten wie Brüche zu bezeichnen (58; 59) So ist $7654:37 = \frac{7654}{37}$; welches Zeichen der Division dem im 30. §. erwähnten beyzufügen ist. Und mit einer ganzen Zahl dividiren, heisst so viel, als in einen Bruch multipliciren, dessen Zähler $= 1$ und der Nenner diese Zahl ist. So ist $45:9 = 45.\frac{1}{9}$ denn $\frac{1}{9}$mahl nehmen, heisst den neunten Theil nehmen (58).

62. Lehrs. Wenn man den Nenner eines Bruchs mit einer ganzen Zahl multiplicirt, den Zähler aber ungeändert läßt, so wird der Bruch so vielmahl kleiner, so viel Einheiten die ganze Zahl hat. Denn man theilt die Einheit in so vielmahl mehr Theile, und nimmt von diesen so vielmahl kleinern Theilen nicht mehr als zuvor.

63. Lehrs. Wenn eines Bruchs Zähler mit einer ganzen Zahl multiplicirt wird, der Nenner aber ungeändert bleibt, so wird der Bruch so vielmahl grösser, so viel Einheiten die Zahl hat. Denn man nimmt mehr Theile, ohne derselben Grösse zu ändern.

64. Zus. Einen Bruch mit einer ganzen Zahl zu multipliciren, darf man nur die Zahl in den

Digitized by Google

Zähler des Bruchs multipliciren (62) und ihn mit einer ganzen Zahl zu dividiren, darf man nur die Zahl in seinen Nenner multipliciren (63).

65. Lehrs. Wenn eines Bruchs Zähler und Nenner zugleich mit einer ganzen Zahl multiplicirt werden, so bleibt die Grösse des Bruchs ungeändert. Denn die erste Multiplication vergrössert den Bruch so vielmahl, so vielmahl die zweyte den vergrösserten Bruch wieder verkleinert.

So ist $\frac{3 \cdot 5}{4} = 5 \cdot \frac{3}{4}$ nach (62). und $\frac{3 \cdot 5}{4} : 5$ nach (63) also $\frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = 5 \cdot \frac{3}{4} : 5 = \frac{3}{4}$

66. Lehrs. Wenn der Zähler eines Bruchs mit einer ganzen Zahl dividirt wird, der Nenner aber ungeändert bleibt, so ist der Bruch mit dieser Zahl dividirt, oder so vielmahl kleiner geworden. Wenn aber der Nenner, mit einer ganzen Zahl, bey ungeändertem Zähler dividirt wird, so ist der Bruch mit dieser Zahl multiplicirt, oder so vielmahl grösser geworden. Denn im ersten Falle, werden von Theilen, deren Grösse sich nicht ändert, weniger als vorhin, im zweyten von grössern Theilen eben so viel als vorhin von den kleinern genommen.

67. Lehrs. Wenn Zähler und Nenner eines Bruchs zugleich durch eine ganze Zahl dividirt werden, so bleibt die Grösse des Bruchs

dirt

unverändert, denn die erste Division verkleinert den Bruch so vielmahl, als die zweyte den verkleinerten Bruch wieder vergrössert (66).

So ist $\frac{8}{12} = \frac{8:4}{12:4} = \frac{8}{3}$; denn $\frac{8:4}{12} = \frac{8}{12}:4$ und $\frac{8:4}{12:4} = (\frac{8}{12}:4).4 = \frac{8}{12}$.

68. Zus. Ein Bruch lässt sich nach 65; 67; auf unzählich viel Arten ausdrücken. Und eben so eine ganze Zahl, die man als einen Bruch ansehen kann, dessen Nenner $= 1$; z. E. $3 = \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{12}{4} = \frac{15}{5}$ u. s. f.

69. Zus. Die Sätze von 62 bis 68 gelten auch, wenn man Divisor, Dividendus, Quotient, statt Nenner, Zähler, Bruch, setzt (61).

70. Aufg. Einen Bruch aufzuheben, d. i. ihn seiner Grösse unbeschadet durch einen kleinern Zähler und Nenner auszudrücken.

Auflös. Man dividire beyde mit einerley Zahl (67).

71. Anm. Es ist also bequem, wenn man Zähler und Nenner in ihre Factoren zerfällt, und die gemeinschaftlichen ausstreicht. $\frac{45}{180} = \frac{5.9}{4.9.2.5} = \frac{1}{4.2} = \frac{1}{8}$. Ist eine von diesen beyden Zahlen so beschaffen, daß sie keinen Factor als 1 hat (numerus primus) oder haben beyde keinen gemeinschaftlichen Factor (numeri inter se primi) so geht das Aufheben nicht an, oder Zähler und Nenner können nicht beyde ganze Zahlen bleiben. $\frac{29}{36} = \frac{2\frac{3}{9}}{4} = \frac{4\frac{3}{4}}{9}$. Dieses bedeutet offenbar, daß man von den neun Theilen des Ganzen,

Digitized by Google

vier, und noch $\frac{3}{4}$ eines solchen Theils nehmen soll. Wäre das Ganze ein Thaler, und sein neunter Theil = 4 Mariengr. so heisst dieß, vier Mariengroschen viermahl, und noch $\frac{3}{4}$ von ihnen nehmen, oder es gäbe 19 Mgr. wie der Bruch unter der ersten Gestalt gleich anzeigt. So ist ein Bruch zu verstehen, dessen Zähler selbst ein Bruch, der Nenner eine ganze Zahl ist; Er bedeutet, daß man von den Theilen des Ganzen, die der Nenner zu machen befiehlt, etliche, und noch ein Stück eines solchen Theils, oder wohl nur das Stück allein nimmt. Wenn die Einheit = 1 Pf. so ist $\frac{\frac{3}{4}}{32}$ so viel als $\frac{3}{4}$ eines Loths.

72. Aufg. Zweene oder mehr Brüche unter eine Benennung zu bringen.

Aufl. Bey zween Brüchen multiplicire man jedes Zähler und Nenner durch des andern Nenner, so entstehen zweene neue Brüche, die den vorigen gleich sind (65) und einerley Nenner, nähmlich das Product der beyden ersten Nenner haben.

Von den beyden Brüchen $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{9}$; entstehen $\frac{3 \cdot 9}{4 \cdot 9}$; $\frac{5 \cdot 4}{9 \cdot 4}$; oder $\frac{27}{36}$; $\frac{20}{36}$;

Bey mehrern Brüchen multiplicire man jedes Zähler und Nenner durch ein Product aus allen übrigen Nennern, so hat jeder der neuen Brüche das Product aus allen Nennern der gegebenen zu seinem Nenner, und ist dem gegebenen, von dem er entstanden ist, gleich.

Von den Brüchen $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{7}{11}$; entstehn $\frac{2 \cdot 5 \cdot 11}{3 \cdot 5 \cdot 11}$; $\frac{4 \cdot 3 \cdot 11}{5 \cdot 3 \cdot 11}$; $\frac{7 \cdot 3 \cdot 5}{11 \cdot 3 \cdot 5}$

Digitized by Google

73. Lehrs. Die Summe oder Differenz zweener Brüche, die einerley Nenner haben, ist ein Bruch, dessen Nenner eben derselbe, und der Zähler die Summe oder Differenz jener Zähler ist (53).

So ist $\frac{4}{5}+\frac{2}{5}=\frac{6}{5}=\frac{2}{3}$ und $\frac{7}{5}-\frac{5}{5}=\frac{2}{5}$

74. Aufg. Zweene oder mehr Brüche zu addiren, oder zweene zu subtrahiren.

Aufl. Man bringe sie auf einerley Benennung (72) und addire oder subtrahire die Zähler (73).

Die Summe der drey Brüche des Exempels (72) ist $\frac{110+132+105}{165}=\frac{347}{165}=2\frac{17}{165}$ (60)

$\frac{2}{3}-\frac{5}{9}=\frac{18-15}{27}=\frac{3}{27}=\frac{1}{9}$

75. Aufg. Einen Bruch mit einem Bruche zu multipliciren.

Aufl. Das Product ist ein Bruch, dessen Zähler das Product der Zähler, und der Nenner das Product der Nenner der Factoren ist.

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}=\frac{3\cdot 5}{4\cdot 6}=\frac{15}{24}.$$

Bew. Einen Bruch mit einem andern multipliciren, heißt, von dem ersten ein solches Stück nehmen, als der andere anzeigt. Man muß also den ersten in so viel Theile theilen, als des andern Nenner Einheiten hat, und von diesen Theilen so viel nehmen, als des andern Zähler befiehlt. Jenes

geschieht durch die Multiplication der Nenner (62) dieses durch die Multiplication der Zähler (63).

$\frac{3}{4}$ mit $\frac{5}{6}$ multipliciren, heisst $\frac{5}{6}$ von $\frac{3}{4}$ nehmen. Also heisst es

$\frac{3}{4}$ in sechs gleiche Theile theilen; und deren 5 nehmen; das ist

$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot 5$. Aber $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{4.6}$ (62) und $\frac{3}{4.6} \cdot 5 = \frac{3.5}{4.6}$ (63). Man sieht, daß die besondern Grössen dieser Zahlen in die Schlüsse keinen Einfluß haben, und wenn z. E. statt der 5 eine 2 gestanden, diese 2 auch am Ende da, wo jetzt die 5 steht, gekommen seyn würde. Folglich ist der Beweis, durch ein solches Exempel geführt, allgemein, weil man dabey nichts, das dem Exempel eigen ist, voraussetzt, und die Zahlen nur als Zahlen überhaupt, nicht als bestimmte Zahlen, betrachtet. Diesen Vortheil, daß man durch Schlüsse, die ein Exempel erläutert, ohne sie auf sich einzuschränken, einen allgemeinen Beweis führen kann, bringen die Zeichen der arithmetischen Arbeiten, vermittelst deren man nur andeutet, daß etwas mit diesen Zahlen des Exempels geschehen soll, welches mit jeden andern Zahlen eben so geschehen würde. Eben so erhellt, daß der Beweis auch von uneigentlichen Brüchen gilt.

76. Zus. Die Multiplication mit einem eigentlichen Bruche, giebt ein kleineres Product, als

als der multiplicirte Factor war. Und das Product aus zween eigentlichen Brüchen, ist kleiner als jeder Factor. Auch ist von jedem eigentlichen Bruche, jede höhere Potenz kleiner, als die niedrigere (45).

77. Zus. Das Quadrat, oder der Würfel eines Bruchs, ist ein Bruch, dessen Zähler und Nenner, das Quadrat oder der Würfel des Zählers und Nenners der Wurzel sind $(\frac{1}{7})^2 = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7}$ (43) $= \frac{1 \cdot 1}{7 \cdot 7}$ (75) $(\frac{4}{9})^3 = \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9}$ (44) $= \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{9 \cdot 9 \cdot 9}$ (75) Umgekehrt, aus einem Bruche die Quadrat- oder Cubikwurzel ausziehen, heißt einen Bruch machen, dessen Zähler und Nenner Quadrat- oder Cubikwurzeln jenes Zählers oder Nenners sind. Denn $\sqrt{\frac{49}{64}}$ muß eine Zahl seyn, deren Quadrat $= \frac{49}{64}$ ist. Aber von $\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{64}}$ ist erwiesenermaassen das Quadrat $= \frac{49}{64}$ also ist $\sqrt{\frac{49}{64}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{64}}$. Eben so muß $\sqrt[3]{\frac{8}{125}}$ eine Zahl seyn, deren Cubus $\frac{8}{125}$ ist; Aber von $\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{125}}$ ist der Cubus $\frac{8}{125}$ also $\sqrt[3]{\frac{8}{125}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{125}}$.

78. Aufg. Einen Bruch mit einem andern zu dividiren.

Digitized by Google

Aufl. Man multiplicire den Dividendus mit dem umgekehrten Divisor.

$$\frac{3}{4} : \frac{5}{11} = \frac{3}{4} \cdot \frac{11}{5} = \frac{33}{20}.$$

Bew. Man will wissen, wie vielmahl der Divisor im Dividendus stecke. Hätten nun beyde einerley Nenner, so dürfte man nur suchen, wie vielmahl die Zähler in einander steckten (53), d. i. der Quotient würde ein Bruch seyn, dessen Zähler des Dividendus Zähler, und der Nenner des Divisors Zähler wäre (61). Haben also die Brüche nicht einerley Benennung, so muß man sie dazu bringen. Also wird aus dem gegebenen Divisor und Dividendus ein anderer Divisor und Dividendus, von gleichen Grössen mit den vorigen, aber anders ausgedrückt, und mit einerley Nenner. Ich will jene die ersten, und diese die zweyten nennen. Des zweyten Divisors Zähler ist ein Product aus des ersten Divisors Zähler, in des ersten Dividendus Nenner, und des zweyten Dividendus Zähler ist ein Product aus des ersten Dividendus Zähler, in des ersten Divisors Nenner (72). Der Quotient nun hat zu seinem Zähler den Zähler des zweyten Dividendus, und zum Nenner, den Zähler des zweyten Divisors. Also kömmt sein Zähler heraus, wenn man des ersten Dividendus Zähler mit des ersten Divisors Nenner, d. i. mit dem Zähler des umgekehrten Divisors multiplicirt: Und der Nenner des Quotienten ist ein Product aus dem Nenner des ersten Divisors in den Zähler des ersten Divisors, d. i. in den

Nen-

Nenner des umgekehrten ersten Divisors. Dieser Beweis wird wieder durch ein Exempel erläutert werden, und doch allgemein bleiben. $\frac{3}{4}$, und $\frac{5}{11}$, sind der erste Dividendus, und der erste Divisor. Nun ist $\frac{3}{4} : \frac{5}{11} = \frac{3 \cdot 11}{4 \cdot 11} : \frac{5 \cdot 4}{4 \cdot 11}$ welche beyden letzten Brüche der zweyte Dividendus und Divisor sind. Aber $\frac{3 \cdot 11}{4 \cdot 11} : \frac{5 \cdot 4}{4 \cdot 11}$

$= \frac{3 \cdot 11}{4 \cdot 5} = \frac{3}{4} \cdot \frac{11}{5}$.

Man kann die Regel auch so ausdrücken, daß man kreuzweis, mit des Divisors Nenner hinauf und mit seinem Zähler hinunter multiplicirt. Da ein Bruch vielmahl in einem andern stecken kann, so kann die Division grosse Zahlen hervorbringen.

79. Aufg. Mit Zahlen, wo Brüche an Ganzen hängen, zu rechnen.

Aufl. Man kann die Ganzen nach 68. 72. mit den Brüchen auf einerley Benennungen bringen, und so mit uneigentlichen Brüchen rechnen. Oder man kann auch die vorgeschriebenen Rechnungen nach den gelehrten Regeln mit allen Theilen einer Zahl, die aus Ganzen und Brüchen zusammen besteht, vornehmen, nachdem man es am bequemsten findet.

$(2 + \frac{3}{4}) : (7 - \frac{5}{6}) = \frac{11}{4} : \frac{37}{6} = \frac{11 \cdot 6}{4 \cdot 37} =$

$\frac{11 \cdot 3}{2 \cdot 37} = \frac{33}{2 \cdot 37}$. $(5 + \frac{3}{8})$

Digitized by Google

$(5+\frac{3}{8})\times(4+\frac{3}{7}) = 4.5 + \frac{4.3}{8} + 5\times\frac{3}{7} + \frac{3}{7}\cdot\frac{3}{8}$

$\frac{2}{7} = 20 + \frac{15}{3} + \frac{10}{7} + \frac{3}{4.7} = 20 + 1 + \frac{1}{2}$

$+ 1 + \frac{3}{7} + \frac{3}{28} = 22 + \frac{14}{28} + \frac{12}{28} + \frac{3}{28} = 23$

$+ \frac{3}{28}$

80. Also wird im XIII. Abs. des 40§. wenn man nach 60. verfahren hat, der Dividendus durch die Multiplication des völligen Quotienten mit dem Divisor; oder durch die Addition des Restes zu dem Producte aus dem Divisor in den Quotienten, so weit sich solcher in ganzen Zahlen finden lässt, wieder hergestellt werden. Welches die Probe der Division hier ist. $17:5 = 3+\frac{2}{5}$; und $3.5+\frac{2}{5}.5$ oder $3.5+2=17$

81. In genannten Zahlen (42) wird oft erfodert, einen Bruch durch die eingeführte Eintheilung des Ganzen auszudrücken. Man darf in solchem Falle die Einheit nur als eine Menge solcher Theile ansehen, in die man sie abzutheilen pflegt, z.E. $\frac{3}{7}$ Pfund $= \frac{3}{7}.32$ Loth $= 13\frac{5}{7}$ Lth und $\frac{5}{7}$ Loth $= \frac{5}{7}.4$ Quentchen $= 2\frac{6}{7}$ Quentchen.

82. Anm. Es ist nöthig, zu zeigen, daß einige Sätze, die oben von ganzen Zahlen dargethan sind, auch von Brüchen gelten. Die meisten Schriftsteller nehmen solches ohne Beweis und meines Erachtens zu übereilt an.

83. Lehrs. Der Satz (10) ist auch von Brüchen wahr.

Sein

Sein erster Theil steht schon im Beweise von (74). Der zweyte Theil erhellt so: $\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5 \cdot 3}{6 \cdot 4}$ (75) aber $5 \cdot 3 = 3 \cdot 5$ und $6 \cdot 4 = 4 \cdot 6$ (10) also $\frac{5 \cdot 3}{6 \cdot 4} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6}$ oder $\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}$.

Bey Brüchen, wie (71) am Ende darstellt, bleibt eben der Beweis:

$\frac{5}{6} \cdot \frac{11}{\frac{2}{7}} = \frac{\frac{5}{6} \cdot 11}{3 \cdot \frac{2}{7}}$ und es erhellt, daß eben das Product herauskommen müsse, wenn man die Ordnung der Factoren veränderte. Man kann nähmlich solche Brüche allemahl auf andere, wo Zähler und Nenner lauter ganze Zahlen sind, bringen. Die jetzigen wären $\frac{5}{18}$ (62) und $\frac{77}{2}$ (78).

84. Lehrs. Der Satz (16) ist auch von Brüchen wahr.

Bew. $(\frac{3}{7} : \frac{5}{11}) \cdot \frac{5}{11} = \frac{3}{7} \cdot \frac{11}{5} \cdot \frac{5}{11}$ (78) aber $\frac{11}{5} \cdot \frac{5}{11} = \frac{11 \cdot 5}{5 \cdot 11}$ (76) $= 1$ (10). 75.

Ferner ist $(\frac{7}{5} \cdot \frac{2}{7}) : \frac{2}{5} = \frac{7}{5} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{2}$ (78) und $\frac{2}{7} \cdot \frac{5}{2}$ $\frac{2}{5}$ $= 1$ (76. 10).

85. Lehrs. Die Sätze von (61 ... 69) sind auch wahr, wenn man statt der dorten genannten ganzen Zahlen Brüche setzt.

Bew. für 61. Wenn man einen Bruch $\frac{3}{4}$ mit einer ganzen Zahl 32 dividirt, so nimmt man den Theil von ihm, den die ganze Zahl anzeigt,

zeigt, das ist, es kömmt ein Bruch heraus: dessen Nenner die ganze Zahl, der Zähler der Bruch, den man dividirt, ist, wie hie $\frac{\frac{3}{4}}{32}$. Die Bedeutung solcher Brüche erklärt (71).

Sollte man nun $\frac{3}{4}$ mit $\frac{32}{5}$ dividiren, so müsste der nunmehrige Quotient wohl so vielmahl grösser werden, als der vorige, so vielmahl der nunmehrige Divisor kleiner ist, als der vorige; z. E. hie fünfmahl. Der vorige Quotient aber war ein Bruch, der fünfmahl grösser wird, wenn man seinen Nenner fünfmahl kleiner macht (66), das ist, wenn der Nenner $\frac{32}{5}$ statt der vorigen 32 wird. Also ist der nunmehrige Quotient der Bruch $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{32}{5}}$ wie 61 von ganzen Zahlen lehrte.

Was soll man aber bey einem Bruche denken, der im Ganzen eine Menge von Theilen voraussetzt, die sich durch keine ganze Zahl ausdrucken lässt, wie hie $\frac{32}{5} = 6\frac{2}{5}$?

Es ist begreiflich, daß man ein Ganzes mit einem Stücke auszumessen unternehmen kann, welches Stück in dem Ganzen nicht nach einer ganzen Zahl enthalten ist. Man wird sich ohne Schwierigkeit eine Länge von $6\frac{2}{5}$ Ellen vorstellen. Wer nun diese Länge mit Ellen ausmessen will, der muß sagen: Sie beträgt 6 Ellen und $\frac{2}{5}$ einer Elle, das heisst: er theilt sie in eine Menge Theile ein, die $6\frac{2}{5}$ heisst; Sie besteht aus 6 ganzen Theilen und $\frac{2}{5}$ eines solchen Theiles.

Wenn

Digitized by Google

Wenn nun diese Länge von $6\frac{2}{7}$ Ellen für eine Einheit angenommen würde, so könnte man wohl fragen: Was für ein Stück dieser Einheit sind $\frac{3}{4}$ einer Elle?

Die Antwort wäre: Man hat $\frac{3}{4}$ einer solchen Grösse, deren auf das Ganze $6\frac{2}{7}$ gehen. Das ist: Man hat einen Bruch, dessen Zähler $\frac{3}{4}$; der Nenner $6\frac{2}{7} = \frac{44}{7}$ ist.

Wenn man den Ducaten zu $2\frac{3}{4}$ Thl. rechnet, was für ein Stück des Ducatens ist der Gulden? Offenbahr $\frac{2}{3}$ desjenigen, wovon der Ducaten $2\frac{3}{4}$ hält. Also kann man sagen, der Gulden betrage $\frac{\frac{2}{3}}{2\frac{3}{4}}$ des Ducaten.

Das Julianische Jahr besteht aus $365\frac{1}{4}$ Tagen. Eine halbe Woche beträgt $3\frac{1}{2}$ Tag. Also sind dritthalbe Woche $= 17\frac{1}{2}$ Tag. Wenn man nun fragt: Was für ein Stück des Julianischen Jahres sind dritthalbe Woche, so heißt es: $\frac{17\frac{1}{2}}{365\frac{1}{4}}$

Diese Beyspiele werden zeigen, daß man auf solche Brüche, bey ganz gemeinen Anwendungen der Arithmetik kommen kann. Man muß also ihre Bedeutung verstehen lernen.

Indessen wird ihre Bedeutung verständlicher, und sie werden zur fernern Rechnung bequemer, wenn man sie so ausdruckt, daß Zähler und Nenner ganze Zahlen werden.

Die-

Dieses geschieht nach (78) denn nun erhellt folgendes: Ein Bruch, dessen Zähler und Nenner selbst Brüche sind, ist der Quotient, welchen der Zähler, mit dem Nenner dividirt, giebt.

Der Bruch also, dessen Zähler $\frac{3}{4}$ der Nenner $\frac{3}{5}$ ist, muß als ein Quotient angesehen werden, dessen Dividendus $\frac{3}{4}$ der Divisor $\frac{3}{5}$ ist. Nach (78) ist dieser Quotient $\frac{3}{4} : \frac{3}{5} = \frac{15}{12}$.

Hieraus fliesst gleich der zweyte Satz in 61; daß nähmlich mit $\frac{5}{7}$ dividiren, so viel heisst, als in einen Bruch multipliciren, dessen Zähler $= 1$ der Nenner $= \frac{5}{7}$ wäre. Denn wenn man 1 als einen Bruch $= \frac{1}{1}$ ausdruckt, so erhellet, aus dem nur erwähnten, daß der nur beschriebene Bruch $\frac{1}{\frac{5}{7}} = \frac{1}{1} : \frac{5}{7} = \frac{1}{1} \cdot \frac{7}{5}$ (78). Mit ihm also multipliciren, heisst, mit $\frac{7}{5}$ multipliciren, das ist, mit $\frac{5}{7}$ dividiren (78).

Für 62. Man multiplicire von $\frac{2}{3}$ den Nenner mit $\frac{5}{7}$; ich sage, das sey so viel als $\frac{2}{3}$ mit $\frac{5}{7}$ dividiren. Denn $\frac{2}{3 \cdot \frac{5}{7}} = \frac{2}{3 \cdot 5 \cdot \frac{1}{7}}$ (75) $= \frac{2}{3 \cdot 5 : 7}$ (61) $= \frac{2}{3 \cdot 5} \cdot 7$ (66) $= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot 7$ (75) $= \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5}$ (75) $= \frac{2}{3} : \frac{5}{7}$ (78).

Für 63. $\frac{2 \cdot \frac{5}{7}}{3} = \frac{2 \cdot 5 \cdot \frac{1}{7}}{3}$ (64) $= \frac{2 \cdot 5 : 7}{3}$ (61) $= \frac{2 \cdot 5}{3} : 7$ (66) $= \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7}$ (64) $= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{7}$ (75).

Also

Also kann man auch in 64. 65 statt ganze Zahl nunmehr Bruch setzen. Denn diese beyden Sätze sind so allgemein wahr, als die, aus welchen sie fliessen.

Für 66. $\frac{2:\frac{5}{7}}{3} = \frac{2.\frac{7}{5}}{3}$ (78) $= \frac{2.7:5}{3}$ (75. 61)

$= \frac{2.7}{3}:5$ (66) $= \frac{2.7}{3.5}$ (64)

$= \frac{2}{3}.\frac{7}{5}$ (75) $= \frac{2}{3}:\frac{5}{7}$ (78)

$\frac{2}{3:\frac{5}{7}} = \frac{2}{\frac{3.7}{5}}$ (78) $= \frac{2}{3.7}.5$ (66)

$= \frac{2.5}{3.7}$ (63) $= \frac{2}{3}.\frac{5}{7}$ (75).

Also sind die folgenden Sätze der Lehre von den Brüchen und den ihnen gleichgültigen Quotienten alle noch wahr, wenn man statt der ganzen Zahlen, die dorten genannt werden, Brüche braucht.

86. Es giebt Grundsätze, die man der Rechenkunst insgemein voranzusetzen pflegt. Die natürliche Arithmetik lehrt sie jeden Menschen in besondern Fällen brauchen, wo er sie nöthig hat, ihr allgemeiner Ausdruck aber giebt ihnen für den Schüler der Rechenkunst ein geheimnißvolles Ansehen. Ich habe sie dieserwegen anfangs nicht ausdrücklich hinschreiben wollen, einen ausgenommen (Vorerinn. 8.) damit aber doch der Rechenkunst, und den Gründen der ganzen übrigen Mathematik nicht etwas so wichtiges

tiges zu fehlen scheine, so sind sie hier. Sie werden sich nun kurz fassen und leicht verstehen lassen.

87. Jede Grösse ist sich selbst gleich. Zwo Grössen, die einer dritten gleich sind, sind unter sich gleich. Was grösser oder kleiner ist, als eine von zwo gleichen Grössen, ist auch grösser oder kleiner als die andere.

88. Gleiches zu gleichen addirt, von gleichen abgezogen, mit gleichen multiplicirt, oder dividirt; giebt gleiches. Gleiches zu ungleichen Dingen addirt, davon abgezogen, damit multiplicirt, oder darein dividirt, giebt bey dem Grössern mehr, als bey dem Kleinern. Das Grössere zum Gleichen addirt oder damit multiplicirt, giebt mehr, als das Kleinere; aber abgezogen, oder in das Gleiche dividirt, weniger.

89. Lassen sich Grössen von einerley Art, d. i. Grössen, deren eine ein Theil der andern seyn kann, so vergleichen, daß man untersucht, wie vielmahl die eine in der andern ganz enthalten sey, oder daß man beyde mit einem gemeinschaftlichen Stücke ausmisst; so kann man sie allemahl als Zahlen ansehen, und dieses unterwirft alle Grössen, die sich dergestalt messen lassen, der Rechenkunst, und verstattet, die Lehren von den Zahlen auf alle solche Grössen anzuwenden. Die genannten Zahlen (42) sind Exempel davon.

Von

Von den entgegengesetzten Grössen.

90. Erkl. Entgegengesetzte Grössen heissen: Grössen von einer Art, die unter solchen Bedingungen betrachtet werden, daß die eine die andere vermindert. Z. E. Vermögen und Schulden, Vorwärtsgehen und Rückwärtsgehen. Eine von diesen Grössen, welche man will, heißt man positiv oder bejahend, die ihr entgegengesetzte negativ oder verneinend.

91. Zus. Es ist willkührlich, welche von beyden man bejahend nennen will. Schulden sind ein verneinendes Vermögen, und Vermögen kann als verneinende Schulden angesehen werden.

92. Zus. Man kann die verneinende Grösse als etwas, das von der bejahenden abgezogen werden muß, ansehen, und also mit dem Zeichen — bezeichnen, wenn die bejahende + hat. So machen 3 Rthlr. Schulden und 7 Rthlr. Vermögen zusammen + 7 — 3 Rthlr. Vermögen. Eben so aber würden 3 Vermögen, und 7 Schulden zusammen + 7 — 3 Schulden machen.

93. Zus. Die verneinende Grösse kann die bejahende übertreffen. In diesem Falle sollte mehr abgezogen werden als vorhanden ist, (92) das heisst, die bejahende Grösse verzehrt so viel, als sie beträgt in der verneinenden, und bleibt noch etwas von der verneinenden mit ihrem Zeichen übrig, 7 Vermögen und 10 Schulden machen 7 — 10 Vermögen, d. i. — 3 Vermögen.

Digitized by Google

94. Zus. Dieses Negative, das übrig bleibt, ist eine wirkliche Grösse, nur der, die als positiv betrachtet wird, entgegengesetzt. Z. E. 3 Thl. Schulden sind ohne Zweifel etwas wirkliches, und können als Schulden betrachtet positiv genannt werden; Nur als Vermögen angesehen sind sie negativ, d. i. dem Vermögen entgegengesetzt; Eine negative Grösse heisst also weiter nichts, als eine Grösse, die man als die ihr entgegengesetzte betrachtet, und dieses durch die Verneinung anzeiget. Will man Schulden als Vermögen betrachten, so muß man sie als etwas dem Vermögen entgegengesetztes, als verneinendes Vermögen betrachten.

95. Zus. Wenn man zu einer verneinenden Grösse, die ihr gleiche bejahende setzet, so heben beyde einander auf und geben zusammen o. So ist $-3+3=0$ oder: wer drey Thaler schuldig war, und 3 Thl. baar Geld bekömmt, der muß damit die Schulden bezahlen, und hat alsdenn Nichts. Man kann also von ihm sagen, er habe zuvor weniger als Nichts gehabt, weil er nun erstlich nichts hat, nachdem er etwas bekommen hat. In diesem Verstande kann man eine verneinende Grösse weniger als nichts nennen; sie ist nähmlich weniger als nichts in Absicht auf die entgegengesetzte. Wenn eine ihr gleiche entgegengesetzte zu ihr kömmt, so ist alsdenn nichts von der Entgegengesetzten vorhanden, und es fehlet ihr also noch etwas, um Nichts

von

Digitized by Google

von der entgegengesetzten zu werden. An sich selbst aber ist jede verneinende Grösse mehr als Nichts, weil sie eine wirkliche Grösse ist. Dieser Ausdruck weniger als nichts, setzt also eine Bedeutung des Wortes Nichts zum voraus, die sich auf eine gewisse Art das Etwas zu betrachten beziehet (nihilum relativum) welche sich von dem Nichts ohne Beziehung genommen (nihilum absolutum) unterscheiden liesse, eine Eintheilung des Nichts, die ein gewisser deutscher Philosoph, der alles haarklein einzutheilen gewohnt ist, und es als einen Fehler der mathematischen Methode ansieht, daß die Divisionen bey ihr mangelten, nicht würde vergessen haben, wenn sich seine Kenntniß in der Mathematik bis auf diese Sätze erstreckt hätte. Nimmt man den Ausdruck weniger als nichts nicht in diesem Verstande, so ist er falsch, und hat wirklich Mathematikverständige zu irrigen Vorstellungen von den verneinenden Grössen verführet. In der gehörigen Bedeutung aber hat er seinen Nutzen, z. E. bey den Grundsätzen (88).

Die Rechnung mit entgegengesetzten Grössen.

96. Aufg. Entgegengesetzte Grössen zu addiren.

Aufl. Man nehme die kleinere aus der grössern weg, und schreibe vor das, was übrig bleibt, das Zeichen der grössern. Denn eine hebt so viel,

Digitized by Google

als sie beträgt, in der andern auf, und also bleibt etwas von der grössern übrig.

So sind + 6 und — 5 zusammen = + 1 aber + 4 und — 7 zusammen — 3.

Kommen verschiedene verneinende und bejahende Grössen vor, so ist es bequem, jede Classe zusammen zu rechnen, und alsdenn zu sehen, was die Summen beyder Classen zusammen geben.

Exempel + 6 — 5
+ 8 — 9
+ 11 — 3
+ 25 — 17 = + 8.

97. Lehrs. Wenn eine Grösse aus zwey Stücken besteht, da das zweyte von dem ersten abgezogen ist, so heisst diese ganze Grösse von einer andern abziehen, so viel als das erste Stücke abziehen und das zweyte addiren.

12 — (15 — 19) = 12 — 15 + 19 = + 16.

Denn wenn man das erste Stück abzieht, so hat man zu viel abgezogen, man sollte nähmlich nur das erste weniger dem zweyten abziehen. Also muß man das zweyte, das man zuviel abgezogen hat, wieder addiren.

98. Lehrs. Eine Grösse abziehen, heisst die ihr entgegengesetzte addiren.

Denn die Entgegengesetzte ist so viel als die Grösse selbst abgezogen (92). Von bejahenden Grös-

sen,

Digitized by Google

sen, ist dieses klar. Niemand zweifelt, daß 4 von 7 abgezogen so viel als 7 — 4 das ist die 4 welche positiv war verneinend genommen, und so zu der 7 addirt (96) sey. Aber wird wohl eben das bey negativen statt finden? wird — 4 von + 7 abziehen so viel seyn als + 4 zu 7 addiren? Man kann dieses gleich daraus sehen, weil die verneinende als bejahend angesehen werden kann, wenn man die ihr entgegengesetzte verneinend nennet (91). Wie also der Abzug einer bejahenden Grösse ihr Zeichen in das entgegengesetzte verneinende verwandelt, so muß der Abzug der verneinenden, ihr Zeichen in das entgegengesetzte bejahende verwandeln.

Anderer Beweis. Man stelle sich die Grösse, von welcher der Abzug geschehen soll, so vor, daß sie ungeändert bleibet, und doch die Grösse, welche man abziehen soll, als einen Theil enthält. Dieses geschiehet, wenn man die Grösse, die man abziehen soll mit dem Zeichen, das sie hat, und auch mit dem entgegengesetzten, zu der Grösse setzet, von welcher der Abzug geschehen soll. Dieser Abzug wird also geschehen, wenn man von der solchergestalt ausgedruckten Grösse den Theil, den man abziehen soll, wegnimmt. Also bleibt eben dieses, das man abziehen sollte, mit dem entgegengesetzten Zeichen stehen.

Man soll — 4 von + 7 abziehen. Man drucke also + 7 so aus, daß — 4 ein Theil davon ist, nähmlich + 7 = + 7 — 4 + 4.

Von der solchergestält ausgedruckten + 7 nehme man — 4 weg, so bleibt + 7 + 4 also ist. + 7 — (— 4) = + 7 + 4.

99. Anm. Wenn die Grösse, die man abziehen soll, aus einer bejahenden und einer verneinenden bestehet, so lässt sich der Beweis aus (97) herleiten; wie einige Schriftsteller gethan haben: Alsdenn aber muß man für den Fall, da eine negative Grösse z. E. — 4 allein abgezogen werden soll, sie folgendermassen 0 - 4 ausdrucken, welches mir wegen der Erinnerung (95) mißfällt.

100. Aufgabe. **Grössen mit einerley oder verschiedenen Zeichen, von einander abzuziehen.**

Auflös. Man verwandele in der Grösse, die man abziehen soll, das Zeichen jeden Theiles in das entgegengesetzte, und addire nach dieser Verwandelung (98).

12 — 7 — (8 — 9) = 12 — 7 — 8 + 9.

101. Lehrs. **Wenn man mit entgegengesetzten Zahlen rechnet, so ist es verstattet, die Einheit bejahend anzunehmen.**

Denn wie alsdenn die bejahenden Zahlen Mengen dieser Einheit oder ihrer Theile sind, so sind die verneinenden Zahlen, Mengen des Entgegengesetzten dieser Einheit. Nähme man sie verneinend an, so würden die bejahenden Zahlen Mengen ihres Entgegengesetzten, und da solches also entweder bey bejahenden oder bey verneinenden geschehen muß, so ist es willkührlich, bey welchen man es annehmen will.

102.

Digitized by Google

102. Lehrs. Eine bejahende Grösse mit einer verneinenden multiplicirt, giebt ein verneinendes Product.

Denn das Product soll die verneinende Grösse so vielmahl enthalten, als die bejahende die Einheit enthält (8. 74); Aber der bejahende Factor, ist die bejahende Einheit (101) selbst etliche mahl, oder einige Theile von ihr genommen. Also ist auch das Product, so viel als der verneinende Factor selbst etliche mahl oder einige Theile von ihm genommen, d. i. es ist verneinend.

So heisst + 7 mit — 3 multipliciren, ein Product finden, darinnen — 3 so vielmahl steckt, als + 1 in + 7; dieses Product also muß — 21 seyn.

103. Lehrs. Eine verneinende Grösse mit einer bejahenden multiplicirt giebt ein verneinendes Product.

Denn die verneinende wird solchergestalt etliche mahl genommen, welches ohnstreitig etwas verneinendes ist. Sie steckt nähmlich in dem Producte so vielmahl, so vielmahl die bejahende Einheit (101) in dem bejahenden Factor steckt (8. 75). Nun steckt die bejahende Einheit selbst, und nicht ihr Entgegengesetztes in dem bejahenden Factor, also muß auch der verneinende Factor selbst in dem Producte stecken; das ist, das Product muß verneinend seyn; denn wäre es be-

Digitized by Google

jahend, so enthielte es das Entgegengesetzte des verneinenden Factors.

So heisst — 7 mit + 3 multipliciren, die — 7 dreymahl nehmen. Soll aber in dem Producte die — 7 dreymahl enthalten seyn, so muß es — 21 heissen: denn in + 21 wäre das Entgegengesetzte von — 7 dreymahl enthalten.

104. Anm. Wenn die verneinende Grösse eine bejahende vor sich hat, ist dieser Satz leicht, wie (97) zu erweisen.

$$(12 - 7).\ 3 = 3.\ 12 - 3.\ 7.$$

105. Lehrs. Zwo verneinende Grössen mit einander multiplicirt, geben ein bejahendes Product.

Denn das Product enthält den einen verneinenden Factor so vielmahl, als der andere die Einheit. Aber die Einheit steckt in diesem Factor nicht selbst, sondern ihr Gegentheil (101). Also steckt auch der übrige verneinende Factor nicht selbst, sondern sein Gegentheil in dem Producte, d. i. das Product ist bejahend.

Wenn man — 7 mit — 3 multiplicirt, so soll — 7 in dem Producte so vielmahl stecken als + 1 in — 3. Es steckt aber das Gegentheil der + 1 in der — 3 dreymahl, also steckt auch das Gegentheil der — 7, das ist + 7 in dem Producte dreymahl, welches Product also + 21 seyn muß.

106. Lehrs. Zweene positive Factoren geben ein positives Product.

Die

Dieſes wird von jederman ohne Beweis angenommen, und erhellet leicht daraus, weil der eine Factor die Einheit ſelbſt etliche mahl enthält, und alſo der andere auch ſelbſt etliche mahl im Product enthalten ſeyn muß.

107. Anm. Nähme man die Einheit verneinend an, ſo würde das Product in (105) und (106) verneinend. Alsdenn wären nähmlich nur die verneinenden und bejahenden Gröſſen verwechſelt (91).

108. Lehrſ. Einerley Zeichen beyder Factoren geben in der Multiplication + und verſchiedene —.

Erhellet aus 102. 103. 105. 106.

109. Aufg. Gröſſen, die aus entgegengeſetzten zuſammengeſetzt ſind, zu multipliciren.

Aufl. Man multiplicire wie gewöhnlich jeden Theil des einen Factors durch jeden Theil des andern, und ſetze die Zeichen nach 108.

Ex.
$$\begin{array}{r} +5-4+9=10 \\ +7+6-8=\ 5 \end{array}$$
$$\left.\begin{array}{l} +5\cdot 7-4\cdot 7+7\cdot 9 \\ +5\cdot 6-4\cdot 6+6\cdot 9 \\ -5\cdot 8+4\cdot 8-9\cdot 8 \end{array}\right\} = 50$$

110. Lehrſ. Wenn der Diviſor und der Dividendus entgegengeſetzte Zeichen haben, ſo iſt der Quotient negativ.

Denn es ſteckt alsdenn der Diviſor nicht ſelbſt, ſondern ſein Entgegengeſetztes im Divi-

Digitized by Google

dendo, also steckt auch nicht die Einheit selbst, sondern ihr Entgegengesetztes im Quotienten.

$\frac{+12}{-3} = -4$; denn -3 steckt nicht selbst viermahl in $+12$ sondern ihr Entgegengesetztes $+3$; also kann auch nicht $+1$ selbst viermahl im Quotienten stecken, sondern -1.

111. Lehrs. Wenn Divisor und Dividendus einerley Zeichen haben, so ist der Quotient positiv.

Denn alsdenn steckt der Divisor selbst, und nicht sein Entgegengesetztes im Dividendo; also auch die Einheit selbst im Quotienten. So ist -3 selbst 4 mahl in -12 enthalten.

112. Lehrs. Einerley Zeichen geben bey der Division $+$ verschiedene $-$

Erhellet aus 110. 111.

113. Aufg. Grössen mit verschiedenen Zeichen zu dividiren.

Aufl. Die Division geschieht wie gewöhnlich, nur die Zeichen nach 112 bestimmt.

$\frac{100 - 25}{5} = 20 - 5 = 15.$

Digitized by Google

II. Capitel.

Die Buchstabenrechnung.

1. Willk. Satz. Eine Zahl überhaupt anzudeuten, bediene man sich eines Buchstabens. Die Veränderungen, die mit den Zahlen vorgenommen werden, drucke man durch die bisher schon gebrauchten Zeichen aus, nur zeige man die Multiplication auch dadurch an, daß man die beyden Factoren, ohne einen Punct dazwischen zu setzen, neben einander schreibt; weil die Buchstaben nicht wie die Zifern einen Werth von ihrer Stelle bekommen.

So heisst das Product aus zwo Zahlen überhaupt a. b oder ab; Es sey $a = 3$, $b = 4$ so heisst es $3.4 = 12$; Wenn $a = 7$ $b = 9$, so heisst es $7.9 = 63$, und so stellt dieser Ausdruck ab alle mögliche Producte; der $c + d$ alle mögliche Summen, der $e - f$ alle Differenzen; der $g : h$ oder $\frac{g}{h}$ alle Quotienten vor. Die Buchstaben können zwar so wohl ganze Zahlen als Brüche, ja eine dritte Art von Zahlen, von denen wir jezo noch keinen Begriff geben können, bedeuten. Aber zu der gegenwärtigen Absicht wird es meistens genug seyn, sie als Zeichen ganzer Zahlen zu betrachten. Indessen bleiben die Regeln ihrer Rechnung allgemein, wenn diese Regeln nichts voraussetzen, das die Bedeutung der Buchstaben auf ganze Zahlen einschränkte.

Anm. Dergleichen Einschränkung ist, wenn man gerade Zahl mit $2m$; jede ungerade mit $2n + 1$ bezeichnet, wo m, n, ganze Zahlen bedeuten müssen.

2. Zus.

Digitized by Google

2. Zuſ. Weil jeder Buchſtabe, jede Zahl bedeuten kann, ſo laſſen ſich zweene Buchſtaben überhaupt, ohne weitere Beſtimmungen nicht mit einander vergleichen. Aber wenn einerley Buchſtabe einmahl mit dieſer beſtimmten Zahl, das anderemahl mit einer andern multiplicirt iſt, ſo läſſt ſich eine Vergleichung zwiſchen beyden dieſen Producten anſtellen. Z. E. 200 c iſt viermahl ſoviel als 50 c; und 7 d + 12 d = 19 d; c und d mögen ſeyn was ſie wollen.

3. Aufg. Ausdrückungen, in denen verſchiedene Buchſtaben, mit verſchiedenen Zeichen zuſammengehenkt befindlich ſind, zu addiren oder zu ſubtrahiren.

Aufl. Man ſchreibe die Theile der Ausdrükkungen unter einander, die einerley Buchſtaben enthalten, und verfahre nach I. 96. 100. und II. 2.

Exempel der Addition.

$$+ 7a + 4b - 3c - 4d = A$$
$$+ 2a - 5b - 4c + 6d = B$$
$$+ 9a - b - 7c + 2d = C$$

Exempel der Subtraction.

$$+ 17a - 12d + 8c - 9d = D$$
$$+ 2a + 8b - 3c - 11d = E$$
$$+ 15a - 20b + 11c + 2d = F$$

4. Anm. Wenn man a, b, c, d jedes eine beſtimmte Einheit, z. E. Centner, Pfunde, Lothe, Quentchen

Digitized by Google

chen gelten läſſt, ſo kann man dadurch ſich dieſe Rechnung erläutern, und ſehen, daß eben das herauskömmt, wenn man dergleichen Exempel auf die gewöhnliche Art rechnete. Z. E. in dieſem Falle wäre a = 100 b, b = 32 c, c = 4 d; ſo iſt A = 90096 Quentchen, B = 24950, alſo A + B = 115046 = C Auch D = 216087; E = 26601; alſo D — E = 189486 = F. Die mühſame Reduction der gröſſern Einheiten auf die geringern, wird durch die Rechnung mit den entgegengeſetzten Gröſſen erſparet, daher dieſes Verfahren ſelbſt bey vielen Rechnungen, die im gemeinen Leben vorkommen, mit Bequemlichkeit gebraucht wird.

5. Aufg. Bey Ausdrückungen wie (3) die Multiplication zu verrichten.

Auflöſ. Man multiplicirt jeden Theil des einen Factors durch jeden Theil des andern, mit Beobachtung der Zeichen nach I. 108.

I. Ex.
$$\begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$

II. Ex.
$$\begin{array}{r} a - b \\ a - b \\ \hline a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2 \end{array}$$

III. Ex.
$$\begin{array}{r} a + b \\ a - b \\ \hline a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2 \end{array}$$

Das erſte Exempel wird unten gebraucht werden. Das letzte zeigt, wie bequem dieſe Rechnung iſt, allgemeine Lehrſätze zu finden, und kurz auszudrucken. Es heiſſt nähmlich: die Summe zwoer

Zah-

Zahlen mit ihrer Differenz multiplicirt giebt die Differenz ihrer Quadrate. Z. E. $17 \cdot 3 = 51 = 10^2 - 7^2$.

6. Aufg. Bey Ausdrückungen wie (3) die Division zu verrichten.

Aufl. Wenn der Divisor und Dividendus gemeinschaftliche Factoren haben, so streiche man solche aus beyden weg (I. 69.) sonst aber deute man die Division nur durch das gehörige Zeichen an. Das Zeichen des positiven und negativen bestimmt sich aus I. 112. ausführlichere Regeln der Division sind hierin unnöthig.

$$\frac{ab-cd}{bc} = \frac{ab}{bc} - \frac{cd}{bc} = \frac{a}{c} - \frac{d}{b}$$

7. Aufg. Potenzen von einerley Wurzel mit einander zu multipliciren.

Aufl. Weil der Exponente jeder Potenz (I. 46) die Zahl der Factoren in ihr anzeigt, so sind in dem Producte so viel Factoren, als beyde Exponenten zusammen anzeigen, also ist eine Potenz, deren Exponent die Summe der Exponenten der Factoren ist.

$$a^2 \cdot a^3 = aa.aaa = a^5$$

$$b^m \cdot b^n = b^{m+n}$$

8. Zus. $(a^2)^3 = a^{2 \cdot 3} = a^6$ und überhaupt $(x^m)^n = x^{mn}$.

9. Zus. $\sqrt{c} = c^{\frac{1}{2}}$ denn $(c^{\frac{1}{2}})^2 = c$ (8) und $\sqrt[3]{e} = e^{\frac{1}{3}}$ und überhaupt $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$

10.

Digitized by Google

10. Aufg. Potenzen von einerley Wurzel mit einander zu dividiren.

Aufl. Weil sich in dem Dividendus so viel Factoren aufheben als der Divisor hat, so bleiben im Quotienten so viel Factoren des Dividendus stehen, so viel der Dividendus mehr hat als der Divisor; der Quotient ist also eine Potenz, deren Exponente herauskömmt, wenn man den Exponenten des Divisors vom Exponenten des Dividendus abzieht.

$$\frac{e^5}{e^3} = \frac{e.e.e.e.e}{e.e.e} = e.e = e^{5-3}$$

$$y^m : y^n = y^{m-n}$$

11. Zus. $a^2 : a^2 = a^{2-2} = a^0 = 1$; und überhaupt $x^0 = 1$.

12. Zus. Wenn des Divisors Exponent grösser ist als der Exponent des Dividendus, so wird des Quotienten Exponent negativ. Aber der Quotient ist alsdenn ein Bruch dessen Zähler 1 der Nenner eine Potenz von eben dem positiven Exponenten ist. Also bedeuten Potenzen mit verneinenden Exponenten so viel als Brüche.

$\frac{a^3}{a^7}$ wird nach der Regel $= a^{-4}$; Es ist aber $= \frac{1}{a^4}$; also sind diese beyden Ausdrükkungen gleichgültig.

13. Zus. $a^{+m} a^{-n} = a^{m-n}$ (7. 10).

14.

14. Aufg. Ein Product ab auf die Potenz m erheben.

Aufl. Dieses heißt ein Product aus m Factoren machen, deren jeder = ab ist, das also ab. ab. ab —. seyn wird. In diesem Producte kömt also m mahl der Factor a, und eben so vielmahl der Factor b vor; das erste giebt a^m, das andere b^m; Folglich ist $(ab)^m = a^m b^m$.

15. Zus. $\sqrt[n]{cd} = \sqrt[n]{c} . \sqrt[n]{d}$, denn vermöge (14) ist $(\sqrt[n]{c} . \sqrt[n]{d})^n = (\sqrt[n]{c})^n . (\sqrt[n]{d})^n = cd$.

16. Aufg. Einen Bruch oder Quotienten (I. 61) $\frac{e}{r}$ auf die Potenz m zu erheben.

Aufl. Man muß ein Product aus m Factoren machen, deren jeder $= \frac{e}{r}$ ist. Das giebt also (I. 75.) im Producte einen Zähler der aus m Factoren $= e$; und ein Nenner der aus eben so viel Factoren $= r$ besteht, folglich ist

$$\left(\frac{e}{r}\right)^m = \frac{e^m}{r^m}$$

17. Zus.

Digitized by Google

17. Zuſ. $\left(\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}\right)^n = \frac{(\sqrt[n]{x})^n}{(\sqrt[n]{y})^n} = \frac{x}{y}$; Alſo iſt $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$.

Von 16; 17; iſt; I. 77. ein Exempel.

III. Capitel.

Die Rechnung mit zehntheiligen und ſechszigzehntheiligen Brüchen.

1. Erkl. Ein Bruch, deſſen Nenner eine Potenz der 10 iſt, heiſſt ein zehntheiliger Bruch. Als $\frac{3}{10}$; $\frac{4}{100}$; $\frac{7}{1000}$; Man nennt ſie Zehntheile, Hundertheile, Tauſendtheile.

2. Zuſ. Nach dem Geſetze der decadiſchen Arithmetik (I. 24) bedeutet eine Ziffer, die der Stelle der Einer zunächſt zur rechten Hand ſtehet, Zehntheile, die dieſer zur rechten Hand ſtehet, Hundertheile u. ſ. f. Jede Ziffer nähmlich bedeutet einen Bruch, deſſen Zähler die Ziffer anzeiget, und deſſen Nenner eine Potenz der 10 iſt, deren Exponent ſo viel Einheiten hat, als die Zahl, welche anzeiget, die wievielte die Stelle

der Ziser von der Stelle der Einer ist. Oder, welches eben das ist, der Nenner ist eine 1 mit so viel Nullen, als die Zahl Einheiten hat, welche anzeiget, die wievielte die Ziser von der Stelle der Einer ist. Die Stelle der Einer muß also mit einem Zeichen bemerkt werden; dazu ich ein, gebrauchen will, andere brauchen auch einen (.) Hat man keine Zahl in der Stelle der Einer anzuzeigen, so muß man eine o dahin schreiben.

Die Brüche im Exempel (1) werden so geschrieben: 0, 347.

3. Aufg. Einen eigentlichen Bruch in zehntheiligen Brüchen auszudrücken.

Aufl. Man henke an den Zähler so viel Nullen, auf so viel Ziffern man die zehntheiligen Brüche suchen will, und dividire gewöhnlicher maassen.

$\frac{1}{2} = \frac{1,0}{2} = 0,5$; $\frac{1}{4} = \frac{1,00}{4} = 0,25$;

$\frac{1}{8} = \frac{1,000}{8} = 0,125$; $\frac{1}{3} = 0,33333\ldots$

$\frac{1}{24} = 0,04166666\ldots$

$\frac{1}{288} = 0,003472222\ldots$

Die letzten beyden Ausdrückungen, stellen den ggr. und Pfennig in Decimaltheilen des Thalers vor.

4. Zus. Ein uneigentlicher Bruch, (I. 56.) oder ein Quotient wie (I. 60.) lässt sich in ganzen

zen Zahlen und zehntheiligen Brüchen ausdrükken.

$\frac{17}{3} = 5,66666\ldots$

5. Zuſ. Man kann einen Bruch nicht allemahl genau in Zehntheiligen ausdrücken, aber ſich allezeit ſeinem wahren Werthe ſo weit nähern als man will; in welcher Abſicht man annehmen muß, daß ſich die Einheit ohne Ende forttheilen laſſe.

6. Zuſ. Man kann die Zifern, die zehntheilige Brüche andeuten, als ſchlechte Einer anſehen, die in Potenzen der 10 deren Exponenten verneinend ſind, multiplicirt wären (II. 12.). Der Exponente iſt nähmlich eine verneinende Zahl von ſo viel Einheiten als die Zahl enthält, welche anzeiget, die wievielte die Zifer von der Stelle der Einer iſt. Dieſes läſſt ſich mit I. 51. vergleichen, wo man den Einer ſelbſt, als in 10^0 multiplicirt anſehen kann (II. 11).

$$532,6417 = 5.10^2 + 3.10^1 + 2.10^0 + 6.10^{-1} + 4.10^{-2} + 1.10^{-3} + 7.10^{-4}$$

7. Zuſ. Deutet man alſo die Ordnung der Zifern, die ganze Zahlen anzeigen, nach I. 51. mit bejahenden Zahlen an, ſo wird die Ordnung der Zifern die zehntheilige Brüche anzeigen, durch verneinende angedeutet.

So hieſſe das vorige Exempel $\begin{matrix} +2 & +1 & 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 5 & 3 & 2 & 6 & 4 & 1 & 7 \end{matrix}$

Digitized by Google

8. Erkl. Der Exponent einer Ziffer, heißt die Zahl, welche ihre Stelle anzeigt. Er muß von dem Exponenten der Potenz (I. 46.) unterschieden werden, und ist für ganze Zahlen bejahend, für zehntheilige Brüche verneinend (7).

9. Lehrs. Das Product zwoer Ziffern von verschiedenen Ordnungen, hat zum Exponenten seiner niedrigsten Ziffer, die Summe der Exponenten der Factoren.

Bew. Für ganze Zahlen ist der Satz (I. 38.) bewiesen.

Man multiplicire also eine ganze Zahl mit einem Decimalbruche, z. E. 300 mit 0,000005, d. i. man mache das Product $\begin{matrix} +2 & 6 \\ 3. & 5 \end{matrix}$; dieses ist so viel als $3.10.^{2}\,5.10^{-6}$ (7. 6.) $= 3.5.10^{2}.10^{-6} = 3.5.10^{-4}$ (II. 13.) (7). So ist wenn a, b, zwo Ziffern, jene von der Ordnung $+m$, diese von der Ordnung $-n$ bedeutet $a.^{+m-n}b = a.10.^{m}b\,10^{-n} = a\,b.\,10^{m-n}$ welches das Product ab von der Ordnung m-n giebt, wo $n > m$ also der Exponent der Ordnung verneinend seyn kann. Wenn auch m verneinend ist, d. i. wenn ein Decimalbruch mit einem Decimalbruche multiplicirt wird, so ist der verneinende Exponente des Products so groß als die beyden verneinenden Exponenten der Factoren zusammen. Z. E. $\begin{matrix} -5 & -3 & -8 \\ 3. & 2 & = 6. \end{matrix}$ Folglich ist eines

Deci-

Decimalbruches von der Ordnung −n, sein Quadrat von der Ordnung −2n und sein Würfel von der Ordnung −3n; Oder: das Product zweener Decimalbrüche, enthält so viel Decimalstellen zur rechten der Stelle der Einer, als beyde Factoren zusammen enthalten. Und das Quadrat eines Decimalbruches zweymahl, der Würfel dreymahl so viel als die Wurzel.

10. Anm. Die Beweise lassen sich erläutern, wenn man die Decimalbrüche mit ihren Nennern ausdruckt. So heißt das erste Exempel $300. \frac{5}{10000000} = \frac{15}{10000}$ und das zweyte $\frac{3}{1000000}$; $\frac{2}{1000} = \frac{6}{1000000000}$.

11. Aufg. Den Quotienten zwoer mit Ziffern von verschiedenen Ordnungen ausgedruckter Zahlen zu finden.

Auflös. Es sey a der Dividendus von der Ordnung m, und b der Divisor von der Ordnung n; oder der Dividendus = a. 10^m, der Divisor = b. 10^n (I. 51. III. 6.) also der Quotient = $\frac{a}{b.} 10^{m-n}$ (II. 10.) oder die niedrigste Ziffer des Quotientens, ist von der Ordnung m−n. Dieses enthält verschiedene Fälle, nachdem m und n positiv oder negativ, und eines grösser als das andere ist.

Es sey a = 12, b = 3 und m = +6; n = +4 oder man soll 12000000 mit 30000 dividiren; der Quotient ist $4. 10^{6-4} = 400$.

Digitized by Google

Wenn $m = +6$, $n = +9$; so ist der Quotient $4.10^{6-9} = 4.10^{-3} = 84^{-3}$

Wenn $m = -3$, $n = +2$ so ist $0,012 : 300 = 4.10^{-3-2} = 0,000004$.

Wenn $m = +3$, $n = +4$ so ist $0,012 : 0,0003 = 4.10^{3+4} = 40$.

Für $0,03 : 0,00007$ ist $a = 3$, $b = 7$, $m = -2$, $n = -5$; also der Quotient $= \frac{3}{7}.10^{-2+5} = \frac{3}{7}.10^{+3} = 0,4285.1000 = 428,5$.

12. Aus diesen Sätzen fließt die Rechnung mit Decimalbrüchen, die durch Exempel deutlicher wird als durch viel Regeln.

I. Addition:

$\frac{3}{7} = 0,428571\ldots$
$\frac{4}{7} = 0,571428\ldots$
$0,999999\ldots$

II. Subtraction

$\frac{1}{4} = 1,25$
$\frac{1}{2} = 0,5$
$0,75 = \frac{3}{4}$

III. Multiplication

$\frac{5}{8} = 0,625$
$\frac{8}{5} = 1,6$

0,625	
3750	
1,0000	

IIII. Division

0,625 | 1,600 (2,56
1,250

3500
3125
3750
3750
0

13. Anm. Wenn einer von beyden Factoren oder alle beyde, Decimalbrüche enthalten, die ohne Ende fortgehen, so kann man das Product nicht völlig finden, und darf also nur die Ziffern bis auf eine gewisse Decimalstelle für richtig annehmen. Es sey

$\frac{7}{3} =$

Digitized by Google

$\frac{7}{3} = 2,33333$
$\frac{3}{7} = 0,42857$

0,933332
466666
1866664
1166665
1633331

0,999995238

Hier erhellet, daß die Ordnung – 6 und die gröſſern Ordnungen verneinender Stellen im Producte nicht vollständig seyn können, weil in diese Stellen aus Ziffern der Factoren, die hier weggelassen sind, Producte kämen. Z. E. die Ziffer der Ordnung – 6 die in $\frac{7}{3}$ vorkommen sollte, gäbe mit der 2 in $\frac{7}{3}$ multiplicirt, ein Product der Ordnung – 6 das hier nicht vorhanden ist. Die Ziffern des Products also, die in der Ordnung – 6 und den gröſſern verneinenden Ordnungen stehen, haben nur in so weit einen Gebrauch, in welchen ihre Summen in die linker Hand stehenden Ziffern einen Einfluß haben. Lieſſe man die Reihe der Ziffern von der Ordnung – 6 im Producte weg, so würde die Ziffer der Ordnung – 5 darinnen, nicht 9 sondern 7 werden. Nun läſſt sich auf die gezeigte Art allemahl beurtheilen, in was für Stellen des Products die fehlende Ziffern der Factoren einen Einfluß haben werden, und man würde sich also eine vergebliche Arbeit machen, wenn man das Product auf alle diese Stellen, so weit man dahin gehörige Zahlen aus den Factoren finden kann, berechnen wollte; Um aber doch des Vortheils, den die auch unrichtigen Zahlen diesen Stellen bringen können, nicht gänzlich zu entbehren, kann man etwa das Product bis auf die nächste von ihnen, z. E. hier bis auf die – 6 berechnen. Das Exempel würde alsdenn so aussehen:

2, 33333
0, 42857

0, 933332
46666
18666
1166
163

0, 999993

Dieſes Verfahren nennt man die abgekürzte Multiplication; (Multiplicatio contracta).

14. Man hat eben ſo eine abgekürzte Diviſion, wenn man bey jeder neuen Ziſer des Quotienten den Diviſor mit einer der letzten Ziſern weniger braucht, wo freylich die letzten Ziſern des Quotienten nicht vollkommen richtig herauskommen.

3, 1415926 | 1, 00000000 (0, 31830992
94247778

5752222
3141592

2610630
2513272

97358
94245

3113
2826

287
279

8

Die

Die beyden letzten Ziffern des Quotienten würden, wenn man sich dieser Abkürzung nicht bedient hätte, 88 gefunden worden; die ersten sechs aber kommen so heraus, wie man sie durch eine schärfere Rechnung findet.

Von den sechzigtheiligen Brüchen.

15. Erkl. Wenn ein Ganzes in 60 Theile, und jeder Theil wieder in 60 und so ohne Ende fortgetheilet werden, so nennt man diese Brüche sechzigtheilige (fractiones sexagesimales). Man kann auf eben die Art die ganzen in Schocke, (Sexagenas) und Schocke von Schocken u. s. w. sammlen.

So wird die Stunde, oder ein Grad, in Minuten (minuta prima), Secunden (minuta secunda) Tertien u. s. w. eingetheilet.

16. Willk. S. Wenn keine Schocke vorkommen, pflegt man die Ordnungen der sechzigtheiligen Brüche mit römischen Ziffern anzuzeigen: z. E. $3\,St.\,49'\,12''\,07''' = 3\,St. + \frac{49}{60} + \frac{12}{60\,60} + \frac{7}{60.\,60\,60}$ wo die Stunde als die Einheit betrachtet wird. Diese römischen Ziffern zeigen also die Exponenten der Potenz an, auf welche 60 im Nenner erhoben ist. Wir wollen statt ihrer die arabischen mit dem vorgesetzten Zeichen — brauchen; welches diese Rechnung der zehntheiligen (6) ähnlich machen wird, nur daß hier die Nenner Potenzen der 60 sind. Dieses hat auch den Vortheil, daß man die Schocke be-

bequem anderen kann. Wenn zu voriger Zahl noch 4 Schocke von Stunden, und 8 Schocke von Schocken kämen, so wäre sie

$$+2 \quad +1 \quad 0 \quad -1 \quad -2 \quad -3$$
$$0 \quad 8 \quad 04 \quad 03 \quad 40 \quad 12 \quad 07$$

17. Zus. Man kann also in dieser Rechnung jedes Paar Ziffern ansehen, als wäre es in eine Potenz der 60 multiplicirt, deren Exponent positiv oder negativ ist. Und daraus sind die Regeln leicht herzuleiten.

Exempel

	$+1$	0	-1	-2
	3	09	18	23
	18	12	54	14
Summe	21	21	12	37
Unterschied	15	57	24	09
	$+1$	-3	-2	-2

$17 \cdot 46 = 782 = 13\ 02;$

Nähmlich das Product $17 \cdot 46 = 782$ bekömmt zur Einheit 60^{-2}, und enthält 13 mahl die Einheit 60^{-1} wenn es mit 60 dividirt wird: Oder, in den gewöhnlichen Ausdrückungen: $17 \cdot 60$.

$$\frac{46}{60^3} = \frac{17 \cdot 46}{60^2} = \frac{13}{60} + \frac{2}{60^2}$$

Die Mühe der Division mit 60 zu ersparen, hat man eine Tafel gemacht, (canon hexacontadon; s. sexagenarum) in welcher man alle Producte jeder zwo Zahlen von 1 bis 60 in einander, so ausgedruckt findet, daß die grössern Einheis

heiten von den geringern abgesondert sind. Z. E. 17. 46 findet man so ausgedruckt 13 02. Der Werth der niedrigsten Einheit, und also auch der nächst höhern wird dabey insgemein durch eine besondere Tafel bestimmt, die man aber nicht nöthig hat, wenn man sich der verneinenden Exponenten auf die gezeigte Art bedienet. v. Hausen Elem. Math. P. I. p. 77. Strauchii Tab. p. 257. Reiheri bacilli sexagenales u. d. g.

Exempel der Division.

−2	−1	+1	−0	−1	
16	33	02	03	45	
	32				
		−2			
	1	00			
		48			
			−3		
		12	00		
		12	00		
			0		

Nähmlich $\frac{33}{60}$: $\frac{16}{60.60} = \frac{33}{16}.60$ (I. 78.) $= 2.$

$60 + \frac{1.60}{16}$; Ferner $\frac{1.60}{16} = 3 + \frac{12}{16} =$

$3 + \frac{12.60}{16.60} = 3 + \frac{45}{60}$.

18. Anm. Man könnte auf eben die Art eine Rechnung für die zwölftheiligen u. a. Brüche machen, wenn der Gebrauch solches erfoderte.

IIII. Ca-

IIII. Capitel.

Die Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzel.

1. Lehrs. Wenn eine Zahl aus zween Theilen bestehet, so enthält ihr Quadrat das Quadrat des ersten Theiles, ein doppeltes Product aus dem ersten Theile in den andern, und das Quadrat des andern Theiles.

Der Beweis ist das erste Exempel II. 5.

2. Zus. Wenn der erste Theil a ein Zehner, der zweyte b ein Einer ist, so fängt sich das Quadrat des ersten Theiles in der Stelle der Hunderter an, d. i. es hat da seine niedrigste Ziser, (I. 50.) und kann nur bis in die Stelle der Tausender gehen, weil es höchstens zwo Zifern haben kann; das doppelte Product fängt sich in den Zehnern an, (I. 37.) und geht höchstens bis in Tausender; das Quadrat des zweyten Theiles fängt sich in den Einern an, und geht höchstens bis in die Zehner.

57		
57		
49	=	b^2
35	=	ab
35	=	ab
25	=	a^2
3249		

3. Zus. Die kleinste Zahl mit drey Zifern ist 100; und ihr Quadrat ist 10000 die kleinste Zahl mit fünf Zifern. Also hat von jeder Zahl die

die mit mehr als zwo Ziffern geschrieben wird, das Quadrat mehr als vier Ziffern.

4. Zus. Von einer Zahl, die drey oder vier Ziffern hat, muß die Quadratwurzel zwo Ziffern (2) und nicht mehr haben.

5. Zus. Wenn eine Zahl von drey oder vier Ziffern in Classen von der Rechten gegen die Linke getheilet wird, deren jede zwo Ziffern, oder auch die linke nur eine enthält, so steckt in der linken Classe, das Quadrat des Zehners, und etwas von dem doppelten Producte, in der rechten Classe das Uebrige dieses Products und das Quadrat des Einers.

So bestünde im Exempel die rechte Classe aus 49 und die linke aus 32. Von 24 ist das Quadrat 576, und die rechte Classe 76 die linke 5.

6. Zus. Es sey die Ziffer des Zehners e, des Einers f, also die Zahl $= e.10 + f.1$ und ihr Quadrat $e^2.100 + 2ef.10 + f^2$; dieses Quadrat ist kleiner als das Quadrat von $(e+1).10$ oder als das Quadrat des um eine Einheit seiner Ordnung vermehrten Zehners, weil eine solche Einheit mehr ist als die gröste Ziffer, die in der Stelle der Einer stehen kann. Folglich kann die linke Classe, nicht das Quadrat eines grössern Zehners als a ist enthalten, weil ein solches Quadrat gröſſer als $(a+b)^2$ seyn würde. Dieses schien mir zu beweisen nöthig, weil die linke Classe wegen des Products 2ab, gröſ-

ser

Digitized by Google

ser seyn kann als a^2. Also ist das grösste Quadrat, das in der linken Classe steckt, das Quadrat des Zehners, den die Wurzel enthält.

Diese Betrachtungen über die Zusammensetzung des Quadrats, (Synthesin) sind nöthig, um die Gründe der Ausziehung der Quadratwurzel (analysin quadrati) zu verstehen.

7. Aufg. Aus einer Zahl, die drey oder vier Ziffern hat, die Quadratwurzel auszuziehen.

Aufl.

			ab
	32	49	57
	25		
R	7	$49 = 2ab + b^2$	
	1	$0 = 2a$	
	7	$0 = 2ab$	
		$49 = b^2$	
S	7	$49 = 2ab + b^2$	
		0	

I) Man theile die Zahl in Classen wie (5).

II) Man suche, was für einer Ziffer ihr Quadrat, so groß oder zunächst kleiner ist als die linke Classe (I. Cap. 49.) dieses Quadrats Wurzel ist der Zehner, den die gesuchte Quadratwurzel enthält (6. 5.) oder derselben erster Theil (2).

III) Man ziehe dieses Quadrat ab, so ist der Rest $R = 2ab + b^2$ (1).

IIII) In dem, was sich von diesem Reste noch in der linken Classe befindet, und in der höchsten Ziffer der rechten Classe, steckt $2ab$ und vielleicht noch etwas drüber (5).

V)

V) Man verdoppele also den gefundenen ersten Theil der Wurzel, und dividire damit die im IIII. Abs. angezeigte Zahl, in welcher Absicht man dieses doppelte so unterschreiben kann, daß seine niedrigste Zifer unter die niedrigste Zifer dieser Zahl, d. i. unter die höchste der rechten Classe kömmt.

VI) Der Quotient, den man bekömmt, ist nicht kleiner als b, aber er kann gröſſer seyn, weil diese Zahl gröſſer als 2 ab seyn kann (5).

VII) Man multiplicire ihn also mit dem doppelten des V. Abs. und schreibe dieses Product als 2 ab unter das doppelte, weil es von eben der Ordnung ist. (I. Cap. 37.).

VIII) Man mache ferner das Quadrat des Quotienten, und schreibe desselben niedrigste Zifer in die Stelle der Einer, die höhere in die Stelle der Zehner wie bey a.

VIIII) Man addire die VII. und VIII. gefundenen Zahlen; wie bey S.

X) Wenn $S = R$ ist, so ist $a + b$ die völlige Wurzel (1).

XI) Wenn $S < R$ so ist $a + b$ kleiner als die eigentliche Wurzel; aber diese ist um keine schlechte Einheit gröſſer, sonst hätte man nach dem VI. Absatze, b um 1 gröſſer gefunden. Also weiß man in diesem Falle zwo Zahlen, die nur um 1 unterschieden sind, zwischen welche die Wurzel fallen muß.

XII)

Digitized by Google

XII) Wenn $S > R$ so ist b zu groß angenommen, (VI. Abs.) man vermindere es also um eine oder mehr Einheiten, bis man ein b bekommt das $S = R$ oder $S < R$ giebt, wovon alsdenn der X. oder XI. Abs. gilt.

XIII) Die gegebene Zahl des I. Abs. muß wieder herauskommen, wenn man $a + b$ mit sich selbst multiplicirt, und in dem Falle des XI. Absatzes, dazu $R - S$ addirt.

XIIII) Die VII. VIII. VIIII. Regel lassen sich in eine zusammenziehen. Man schreibe neben das doppelte des ersten Theiles (V) den gefundenen Quotienten rechter Hand, und multiplicire diese Zahl, die aus $2a +$ dem gefundenen Quotienten, der b seyn soll besteht, mit dem gefundenen Quotienten; so erhält man $(2a + b)$. $b = 2ab + b^2$ auf einmahl, und hat die folgenden X. XIII. Regeln noch zu beobachten.

Die Rechnung sieht so aus:

$R = 749$

$107 = 2a + b$

$S = 749 = (2a + b).b.$

0

8. Aufg. Die Theile eines Quadrates zu finden, wenn die Wurzel aus mehr als zween Theilen besteht.

Aufl. Für eine dreytheiligte Wurzel $p + q + r$, setze man $p + q = a$, $r = b$; so ist aus (I)

$a^2 =$

$q^2 = p^2 + 2pq + q^2 = A$

$2ab = 2.(p+q).r$

$b^2 = r^2$

Also das Quadrat der dreytheiligten Wurzel

$p^2 + 2pq + q^2 + 2.(p+q).r + r^2 =$

$A + 2.(p+q).r + r^2 = B$

Hat die Wurzel vier Theile $p+q+r+f$ so setze man $p+q+r = a$; $f = b$; und ihr Quadrat ist

$B + 2.(p+q+r).f + f^2 = C$

Hat sie fünf Theile, daß nähmlich zu den vorigen vieren noch t kömmt, so setze man die ersten vier $= a$; und $t = b$; ihr Quadrat ist also

$C + 2.(p+q+r+f).t + t^2 = D$ oder

$p^2 + 2pq + q^2$

$+ 2.(p+q).r + r^2$

$+ 2.(p+q+r).f + f^2$

$+ 2.(p+q+r+f).t + t^2$

In der ersten Zeile steht das Quadrat der zweytheiligten Wurzel $= A$; in den ersten beyden zusammen, der dreytheiligten $= B$; in den ersten drey zusammen, der viertheiligten $= C$; in den ersten vier zusammen, der fünftheiligten $= D$; käme zu der Wurzel noch ein Theil $= u$; so käme für ihr Quadrat, zu diesen vier Zeilen, noch eine

$2.(p+q+r+f+t).u + u^2$

Man sieht leicht daß dieses ohne Ende nach folgendem Gesetze fortgeht: Wenn zu der Wurzel ein neuer Theil kömmt, so kommen zu dem Qua-

Staatsbibliothek München
Digitized by Google

drate, zwey Stück; ein doppeltes Product, aus der Summe aller vorhergehenden Theile in den neuen, und das Quadrat des neuen Theils. Wenn also eine vieltheiligte Wurzel um einen Theil wächst, so kömmt zu ihrem Quadrate so was dazu, wie zu dem Quadrate einer eintheiligten Wurzel kömmt, wenn diese um einen Theil wächst, das ist eine zweytheiligte aus ihr wird. Was hier der zweyte Theil ist, ist dorten der neue; statt des dortigen ersten ist hie die Summe aller vorhergehenden. Man kann also dieses Gesetz so ausdrücken: man sehe die Wurzel als eine zweytheiligte an, da die Summe aller Theile, den letztern ausgenommen, der erste Theil, und der letzte Theil, der zweytheiligten zweyter Theil wäre.

9. Zus. Jedes Quadrat besteht aus den Quadraten aller Theile der Wurzel, und aus den doppelten Producten der Summen aller ersten Theile in jeden nächstfolgenden; z. E. der beyden ersten in den dritten; der drey ersten in den vierten, u. s. f.

10. Zus. Es sey e eine Ziffer von der Ordnung n, und f eine von der Ordnung n−1, daß also e und f zweene nächst auf einander folgende Theile der Wurzel bedeuten, die sich durch $e.10^n + f.10^{n-1}$ ausdrücken lassen (l. 51.). So ist des Theiles, den e vorstellt, sein Quadrat $= e^2.10^{2n}$ also von der Ordnung 2n; sein doppeltes Product in den nächstfolgenden $= 2ef.$

p. 46.

10

10^{2n-1} (N. 7.) von der Ordnung $2n-1$, und das doppelte Product aus der Summe aller Theile der Wurzel von höhern Ordnungen, bis mit auf den von der Ordnung n, in den Theil von der Ordnung $n-1$ ist ebenfalls von der Ordnung $2n-1$, weil man alle Theile von höhern Ordnungen als Mengen der Einheiten von der Ordnung n ansehen kann (I. 27); also fangen sich die Quadrate der Theile in den geraden Ordnungen und die doppelten Producte in den ungeraden an. p. 79.

11. Zus. Das Quadrat und das doppelte Product des 10 §. können zusammen keine Zifer enthalten, welche die Ordnung $2n+2$ erreichte. Vom Quadrate ist es daher klar, weil es nicht über zwo Zifern hat, davon die niedrigste von der Ordnung $2n$ ist. In dem doppelten Producte kann $2ef$ drey Zifern haben, deren höchste also von der Ordnung 2 oder in 10^2 multiplicirt ist. Solchergestalt kann die höchste Zifer von $2ef.\ 10^{2n-1}$ in 10^{2n+1} multiplicirt, oder von der Ordnung $2n+1$ seyn. Der Satz ist also von jedem dieser beyden Dinge für sich betrachtet klar. Daß aber auch ihre Summe die Ordnung $2n+1$ nicht übersteige, erhellet daraus, weil solches nicht geschicht, wenn e und f die grössten Werthe haben, die sie haben können, jedes nähmlich eine Neune ist, und also die beyden nach einander folgenden Theile der Wurzel $9.10^n + 9.10^{n-1}$ sind. Also ist des höchsten

Theiles Quadrat = 81.10^{2n} und das doppelte Product = $2.81.10^{2n-1} = 162.10^{2n-1}$, also stehen diese beyde Theile so unter einander

81 von der Ordnung 2n

162 von der Ordnung 2n−1

Summe 972 von der Ordnung 2n−1

Hier ist also die höchste Zifer 9 von der Ordnung 2n+1; Und wenn e und f kleinere Zifern sind, sind diese beyde Dinge zusammen noch weniger als hie für den grössten Werth von e und f gefunden worden.

12. Zus. Wenn g der nächst folgende Theil der Wurzel, also von der Ordnung n−2 ist, so erhellet, wie in 10. 11. daß das Quadrat von der Ordnung 2n−2, und das doppelte Product aus f in g von der Ordnung 2n−3 ist, auch beyde zusammen die Ordnung 2n−1 nicht erreichen. Wie auch daß das Quadrat von f niedriger ist als alle vorhergehende Theile des Quadrats der Wurzel und das Quadrat von g niedriger als alle vor ihm vorhergehende Theile, oder: daß in dem Quadrate einer Zahl, das Quadrat der niedrigsten Zifer der niedrigste Theil ist.

13. Zus. Wenn eine Zahl M aus n+1 Zifern besteht, daß ihre höchste Zifer von der Ordnung n ist (I. 38) so nenne man die Zahl, welche diese höchste Zifer ausdrückt = a, und die Zahl, welche alle die folgenden Zifern zusammen ausdrücken = b, daß $M = a + b = e.10^n + b$

$+b$ wenn die höchste Ziser ohne Absicht auf den Werth ihrer Stelle betrachtet e heisst. Weil nun eine einzige Einheit einer höhern Ordnung mehr ist als eine Zahl, die mit lauter Zifern niedrigerer Ordnungen geschrieben wird, so ist 1. $10^n > b$ also $(e+1).10^n > M$ also ist das Quadrat von $(e+1).10^n$ grösser als das von M; In dem Quadrate von M steckt also kein grösser Quadrat als das Quadrat von a; Und da a^2 in den Zifern der Ordnung 2n im Quadrate von M enthalten ist, (10) so ist das grösste Quadrat, das in diesen Zifern steckt $= a^2$. Ferner ist eine einzige Einheit von der Ordnung $n+1$ oder $10^{n+1} > M$ und also das Quadrat jener Einheit, d. i. eine Eins von der Ordnung $2n+2$ (II. 7.) grösser als das Quadrat von M; Folglich kann das Quadrat von M keine Ziser von der Ordnung $2n+2$ haben. Hätte es nur eine 1 von dieser Ordnung, so folgten dieser 1 wegen der Theile des Quadrats, die von den verschiedenen Zifern der Zahl M entstehen, noch Zifern und nicht lauter Nullen. Eine 1 aber von der Ordnung $2n+2$ nach der nicht lauter Nullen folgen, ist mehr als eine Eins von dieser Ordnung, nach der lauter Nullen folgen; also wäre das Quadrat von M mehr als das von 10^{n+1} welches doch nicht seyn kann.

14. Zus. Das Quadrat von M, hat Zifern wenigstens von der Ordnung 2n (10) höchstens

Digitized by Google

von der $2n+1$ (13) das ist, es hat wenigstens $2n+1$ höchstens $2n+2$ Ziffern (l. 28).

15. Zus. Eine Zahl, die $2n+1$ oder $2n+2$ Ziffern hat, hat eine Quadratwurzel von n Ziffern. Denn das Quadrat einer Wurzel von weniger Ziffern, kann nicht $2n+1$, und das Quadrat einer Wurzel von mehr Ziffern, muß mehr als $2n+2$ Ziffern haben (14).

16. Zus. Wenn man eine Zahl, die $2n+1$ oder $2n+2$ Ziffern hat, in Classen von der Rechten gegen die Linke abtheilet, daß jede Classe zwo Ziffern bekömmt, so erhält man im letzten Falle $n+1$ Classen jede von einem Paare Ziffern; im ersten n Classen jede von einem Paare Ziffern, und die höchste Ziffer bleibt einzeln. Wird also diese einzelne höchste Ziffer auch für eine Classe gerechnet, so hat die Zahl in beyden Fällen so viel Classen, so viel Ziffern ihre Wurzel hat (15).

17. Zus. Die höchste Classe enthält die Ziffern von der Ordnung $2n$ und $2n+1$, und also ist das grösste Quadrat, das in ihr steckt, das Quadrat der höchsten Ziffer (13).

18. Zus. Was noch über dieses in dieser Classe steckt, zu der Ziffer von der Ordnung $2n-1$, d. i. zu der höchsten Ziffer der nächstfolgenden Classe gerechnet, enthält das doppelte Product aus dem höchsten Theile der Wurzel in den nächstfolgenden (11). Und der Ueberschuß der Ziffern von der Ordnung $2n-1$ nebst der Ziffer von der Ordnung $2n-2$ d. i. nebst der nie-

drig

dritten Ziffer der zweyten Classe, enthält das Quadrat des zweyten Theils der Wurzel (11).

19. Zus. Also kann man aus den beyden höchsten Classen, die beyden höchsten Theile der Wurzel nach (7) finden.

20. Zus. Was nach diesem Verfahren übrig bleibt, zu der Ziffer von der Ordnung $2n-3$, d. i. zu der höchsten Ziffer der dritten Classe genommen, enthält das doppelte Product aus den beyden ersten Theilen zusammen, in den dritten (10) und was nach Abzuge dieses doppelten Products übrig bleibt, nebst der Ziffer von der Ordnung $2n-4$ d. i. nebst der niedrigsten Ziffer der dritten Classe enthält das Quadrat des dritten Theiles der Wurzel (12) den man also finden kann, wenn man die beyden ersten zusammen als einen ansiehet, und damit und mit der höchsten Ziffer der dritten Classe, nebst den höhern so verfährt, wie man mit dem ersten Theile und der höchsten Ziffer der zweyten Classe nebst den höhern, verfuhr, den zweyten Theil zu finden (19).

21. Zus. So viel Ziffern, als man von der Wurzel schon gefunden hat, kann man zusammen als einen einzigen Theil, von der Ordnung der niedrigsten Ziffer unter den gefundenen ansehen, (l. 27.) daß also die nächste Ziffer, die man sucht, den nächst niedrigern Theil bedeutet. Ferner ist das Quadrat des schon gefundenen Theiles der Wurzel, allezeit schon abgezogen worden,

Digitized by Google

ehe man daran denket den nächstfolgenden zu finden (19. 20.). Es bedeute nun n nicht mehr die Ordnung der höchsten Ziser der Wurzel, sondern der niedrigsten in dem schon gefundenen Theile, so hat man das Quadrat dieser niedrigsten Ziser von derjenigen Zahl, aus welcher man die Wurzel ziehen will, ihrer Ziser von der Ordnung 2n abgezogen. Diese Ziser ist die niedrigste in ihrer Classe (16), denn es stehen ihr 2n Zifern, und also n Paare von Zifern zur rechten Hand (I. 28.). Nachdem man also das Quadrat des gefundenen Theiles der Wurzel abgezogen hat, so nimmt man die übrig gebliebenen Zifern von der Ordnung 2n, nebst den höhern, zu der Ziser von der Ordnung 2n — 1; d. i. zu der höchsten der folgenden Classe, und weiß, daß man in diesen Zifern zusammen das doppelte Product aus dem gefundenen Theile der Wurzel von der höchsten Ordnung bis an die Ordnung n, in den nächsten, den man sucht, von der Ordnung n — 1 antrifft (10). Man findet also den nächstfolgenden Theil der Wurzel überhaupt, wie man aus dem ersten Theile den zweyten findet (19), und prüfet eben so, ob man ihn richtig gefunden hat, indem man sein Quadrat und sein doppeltes Product zusammen addirt von der niedrigsten Ziser der Classe, aus der man ihn gefunden hat, und den nächst höhern noch übrigen abzieht. Und so giebt jede Classe eine neue Ziser der Wurzel.

23.

23. Aufg. Aus einer Zahl, die so viel Zifern hat als man will, die Quadratwurzel zu finden.

Aufl. I. Man theile sie in Classen, jede zu zwo Zifern, von der Rechten gegen die Linke, die Wurzel wird so viel Zifern haben, als Classen herauskommen; die höchste Classe kann auch nur eine Zifer enthalten (15).

II. Man suche, welcher Zifer Quadrat der höchsten Classe gleich, oder nächst kleiner ist. Diese Zifer ist die höchste der Wurzel (17), deren Quadrat man abziehen muß.

III. Zu dem, was in dieser Classe übrig bleibt, nehme man die folgende Classe; Unter die höchste Zifer dieser folgenden Classe, schreibe man die niedrigste Zifer des verdoppelten gefundenen Theiles der Wurzel, und die höhern Zifern dieses Doppelten nach der Ordnung weiter linker Hand. Man dividire mit diesem Doppelten in die Zifern, die darüber stehen, und nehme den Quotienten für den nächstfolgenden Theil der Wurzel an.

IIII. Man multiplicire diesen Quotienten mit dem Doppelten des ersten Theiles, (III) und schreibe das Product auch so, daß es sich unter dem Anfange dieses Doppelten anfängt.

V. Man mache das Quadrat des Quotienten, und fange es unter der niedrigsten Zifer der Classe, aus deren höchsten Zifer man den Quotienten gefunden hat, zu schreiben an, so, daß

die höhere Ziser dieses Quadrates unter die höchste Ziser der erwähnten Classe zu stehen kömmt.

VI. Man addire das doppelte Product (IIII) und das Quadrat (V), wenn sich die Summe von den darüberstehenden Zahlen abziehen lässt, so ist der Quotient richtig der gesuchte Theil der Wurzel. Ist aber die Summe grösser, als was über ihr steht, so muß man den Quotienten so lange vermindern, bis der Abzug angehet.

VII. Was übrig bleibet, nehme man zu der folgenden Classe, sehe soviel von der Wurzel, als man gefunden hat, als den ersten Theil an, und verfahre, daraus den nächstfolgenden zu finden, nach dem III. IV. V. VI. Absatze.

VIII. Wenn nach Vollendung dieser Arbeit von der niedrigsten Classe, und nachdem man alle Zifern der Wurzel, bis mit auf den Einer gefunden hat, in der Einer und Zehner Stellen, noch etwas übrig bleibt, so ist die gefundene Zahl zunächst kleiner als die Wurzel, so daß, wenn man diese Zahl um 1 vermehrte, sie grösser als die Wurzel würde.

VIIII. Die gefundene Zahl mit sich selbst multiplicirt, und in dem Falle des VIII Absatzes das Uebriggebliebene dazu addirt, muß die Zahl, aus welcher man die Wurzel gezogen hat, wieder herstellen.

Digitized by Google

N Exempel.

1	70	30 | 25	(p q r f
1	= pp		1 3 0 5

A | 70 |

(2) = 2p

6 = 2pq

9 = qq

P = 69 = 2pq + qq

B = 1 | 30 |

26 = 2.(p + q)

Q = 100 = 2(p + q).r + rr

C

1	30	25	
	(26	0)	= 2.(p + q + r)
1	30	0	= 2.(p + q + r).f
		25	= ff

R 1 30 25 = 2.(p + q + r).f + f²

0

Bey A, B, C, ist jedesmahl die folgende Classe zu dem Reste von der vorhergehenden genommen, und eine neue Ziser der Wurzel daraus gefunden worden. Ferner erhellet, daß nichts übrig geblieben ist, nachdem man von N, zusammen pp + P + Q + R abgezogen hat: Aber dieses ist zusammen das Quadrat von p + q + r + f (8) also ist dieses Quadrat = N und folglich $\sqrt{N} = p + q + r + f$. Daß die Theile des Quadrats zum Abziehen an den gehörigen Orten unterschrieben sind, erhellet aus (10).

24. Lehrs. Es sey u eine ganze Zahl, die sich nicht durch die kleinere ganze Zahl x dividiren lässt, also $\frac{u}{x}$ ein uneigentlicher Bruch, der sich nicht auf eine ganze Zahl bringen lässt (I. 57.) das Quadrat eines solchen Bruchs wird keine ganze Zahl seyn.

Bew. Es sey dieses Quadrat $\frac{uu}{xx} = p$ einer ganzen Zahl, so ist $\frac{uu}{x} = px$ einer ganzen Zahl. Also muß uu sich durch x dividiren lassen; d. i. x muß ein Factor des Products uu seyn. Es ist aber, wie angenommen wird, kein Factor von u; Also ist nur folgende Art möglich, wie x ein Factor von uu seyn kann: Es muß selbst ein Product von zween Factoren seyn, deren einer ein Factor von dem einen u, der andere von dem andern u ist, so wird das Product beyder u, das Product x enthalten. Weil aber ein u mit dem andern einerley ist, so kann das eine keinen Factor von x enthalten, den das andere nicht auch enthielte, und also ist entweder in keinem u ein Factor von x enthalten, oder das ganze x ist als ein Factor in jedem u enthalten. Das letzte soll nicht seyn, also findet das erste statt, und folglich ist x kein Factor von uu, also auch $\frac{uu}{xx}$ keine ganze Zahl.

25.

Digitized by Google

25. Zuſ. Eine Zahl, die aus einer ganzen und einem eigentlichen Bruche beſteht, läßt ſich auf einen uneigentlichen von der Beſchaffenheit (24) bringen (I. 79.) und hat alſo zu ihrem Quadrate keine ganze Zahl. Von einem eigentlichen Bruche iſt dieſes ſchon aus (I. 76.) klar.

26. Zuſ. Wenn die Quadratwurzel einer ganzen Zahl, gröſſer als eine gewiſſe ganze Zahl M und kleiner als M + 1 iſt, ſo giebt es keinen eigentlichen Bruch, der, an M gehenkt, dieſe Wurzel völlig genau darſtellte. Solche Wurzeln laſſen ſich alſo weder durch ganze Einheiten, noch durch Theile der Einheit vollkommen richtig ausdrücken. Man heiſſt ſie Irrationalzahlen, oder ſurdiſche Zahlen, (numeri irrationales, ſurdi, incommenſurabiles). Und Zahlen, die ſich durch ganze Einheiten, oder Theile derſelben ausdrücken laſſen, heiſſen Rationalzahlen: dahin gehören alſo die ganzen Zahlen und beyderley Brüche, (I. 57.) wenn ſich Zähler und Nenner von ihnen völlig angeben laſſen. Zu Irrationalzahlen wird erfodert, daß kein Theil der Einheit ſie miſſt, oder in ihnen genau einigemahl nach einer ganzen Zahl enthalten iſt. Denn ſonſt giebt es Rationalzahlen, die von gewiſſen Theilen der Einheit nicht gemeſſen werden, ob es gleich andere thun (III. 5.).

27. Aufg. Aus einer ganzen Zahl, deren Quadratwurzel keine ganze Zahl iſt, dieſe Wurzel durch Näherung auszuziehen.

Aufl.

Digitized by Google

Aufl. Wenn man annimmt, die Wurzel enthalte ganze und Zehntheilchen, so enthält das Quadrat Hundertstheilchen (III. 9.). Man kann aber die gegebene ganze Zahl so ausdrücken, daß sie Hundertstheilchen enthält, wenn man ein Paar Nullen an sie henkt, den Ort der Einer aber nach III. 2. bezeichnet. Z. E. $15 = 15{,}00 = \frac{1500}{100}$. So kann man also die Wurzel erstlich in ganzen Zahlen, und dann die dazu gehörigen Zehntheilchen suchen. Ein Quadrat von Hundertstheilchen, enthält Zehntausendtheilchen, und also müssen an die gegebene Zahl zwey Paar Nullen gehenkt werden, um die Wurzel in Hundertstheilchen zu finden. Ueberhaupt hat eine Wurzel, die Decimalbrüche von der Ordnung $-n$ enthält, ein Quadrat, dessen niedrigste Ziser von der Ordnung $-2n$ ist (II. 9). Die ganze Zahl aber, aus welcher man die Wurzel bis auf die Ordnung $-n$ ziehen will, wird als eine Menge Decimalbrüche von der Ordnung $-2n$ ausgedruckt, wenn man an sie n Paare Nullen henkt. Man henke also an die ganze Zahl, so viel Paare Nullen, so viel Decimalzifern der Wurzel man finden will, und verfahre übrigens nach (23), denn es ist so viel als wäre die Wurzel, die man sucht, eine ganze Zahl, deren Einheit eine Eins von der Ordnung $-n$ ist. (I. 53.).

Exem-

Exempel

3,00 00 (1,7320508 . . . = √3
1
---
2 | 200
(27)
189

1100
(343)
1029

7100
(3462)
6924

17600
(34640)

1760000
(346405)
1732025

2797500
(3464100)

279750000
(34641008)
277128064

2621936

Probe.

$(1,7320)^2 = 2,99982400$

2. 1,732. 508 = 17599712
-7
-7

$(508)^2$ = 258064

Quadrat des gefundenen Theils der Wurzel 2,99999997378064

Rest 2621936

Summe 3,

Von

Von der Cubikwurzel.

28. Aufg. Den Würfel einer zweytheilichten Wurzel $a+b$ zu finden.

Aufl. Das Quadrat

$$a^2+2ab+b^2$$

multipl mit $a+b$

giebt

$$a^3+2a^2b+ab^2$$
$$+\ a^2b+a2b^2+b^3$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+a3b^2+b^3$$

29. Zus. Wenn a ein Zehner, und b ein Einer wie (2. 6.) ist, so ist $a^3=e^3.1000$

$$3a^2b=3e^2f.100$$
$$3ab^2=3ef^2.10$$
$$b^3=f^3.1.$$

woraus man sieht, in was für Stellen des Würfels sich diese Theile anfangen.

30. Zus. Der Würfel einer einzigen Ziser kann nicht über drey Zifern haben, (I. 49.) das Quadrat der grösten Ziser dreymahl genommen, und in die grösste Ziser multiplicirt, kann nicht über $3.9.9.9=3.729=2187$ seyn, und also kann, wenn $e=9$, $f=9$, ist, $3a^2b$ sich bis in die Stelle der Hunderttausender erstrecken. Eben so kann $3ab^2$ wenn es am grösten ist, nur $3.9.9^2.10=21870$ seyn, und sich also bis in die Stelle der Zehntausender erstrecken, und endlich b^3 kann bis in die Hunderter gehen.

Exem:

Exempel; Wenn e = 5, f = 7 so ist

$a^3 = 125000$

$3a^2b = 525$

$3ab^2 = 735$

$b^3 = 343$

$185193 = (57)^3$

Von einer Zahl mit zwo Ziffern, hat der Würfel zum wenigsten vier Ziffern, weil der Würfel von 10; so viel hat. Mehr als sechs Ziffern kann der Würfel einer Zahl von zwo Ziffern nicht haben. Denn die kleinste Zahl mit drey Ziffern, 100; hat zum Würfel, die kleinste Zahl mit sieben Ziffern 1000000.

31. Zus. Von einer Zahl, die mit vier, fünf oder sechs Ziffern geschrieben wird, hat die Cubikwurzel nicht weniger (I. 49.) noch mehr (30) als zwo Ziffern. Wenn man sie also von der rechten gegen die linke in Classen theilt, daß die rechte oder niedrigste Classe drey Ziffern, die linke oder höchste, eine, zwo oder drey bekömmt, so sind so viel Classen als Theile der Wurzel.

32. Zus. Der Würfel von (e + 1). 10. ist grösser als der Würfel von e. 10 + f. 1 (wie 6). Was also von den Producten $3a^2b$, $3ab^2$, in die linke Classe kömmt, kann den daselbst befindlichen Würfel von a oder von e. 10 nie so stark vermehren, daß dieser Vermehrung wegen in

dieſer Claſſe der Würfel von $(e+1)$ 10 zu ſtehen käme. Folglich iſt der gröſſte Würfel, den die linke Claſſe enthält, a^3.

33. Zuſ. In der höchſten Ziffer der rechten Claſſe, fängt ſich $3a^2b$ an, in der mittlern $3ab^2$, in der niedrigſten, b^3.

34. Aufg. Aus einer Zahl N; die vier bis ſechs Ziffern hat, die Cubikwurzel zu ziehen.

Aufl. I. Man theile ſie nach (31) in Claſſen, und ziehe von der linken Claſſe den gröſſten Würfel, der darinnen ſteckt, ab, ſeine Wurzel iſt der Zehner, den die Wurzel enthält (32).

II. Den Reſt nehme man zu der folgenden Claſſe, quadrire den gefundenen Theil der Wurzel, nehme dieſes Quadrat dreymahl, und ſange ſolches dreyfache Quadrat unter der höchſten Zahl der rechten Claſſe zu ſchreiben an, von da man es weiter gegen die linke ſchreibe.

III. Man dividire damit die darüber ſtehenden Zahlen. Der Quotient iſt nicht kleiner als b, kann aber gröſſer ſeyn (33).

IIII. Ihn zu prüfen; multiplicire man ihn mit dem dreyfachen Quadrate (11) und das Product ſange man unter der höchſten Zahl der rechten Claſſe zu ſchreiben an, weil es $3a^2b$ ſeyn ſoll (33).

V. Des Quotienten Quadrat multiplicire man mit dem erſten Theile, nehme das Product dreymahl

mahl und fange es unter der mittlern Zahl der rechten Classe zu schreiben an, weil es $3ab^2$ seyn soll (33).

VI. Des Quotienten Würfel, als b^3 fange man unter der niedrigsten Zahl der rechten Classe zu schreiben an (33).

VII. Man addire die IIII. V. VI. gefundenen Grössen; Wenn ihre Summe S; so groß ist, als der Rest der ersten Classe, und die zweyte zusammengenommen oder R, so ist der Quotient b, und $a+b$ die gesuchte Cubikwurzel, als eine Zahl, deren Cubus (I. VII.) der gegebenen Zahl gleich ist.

VIII. Wenn $S > R$ so muß man den Quotienten immer um 1 vermindern, und mit der verminderten Zahl, die als Quotient betrachtet zu klein wäre, wieder nach IIII. V. VI. VII. verfahren, bis man ein S bekömmt, das nicht grösser ist als R. Sind diese Dinge gleich, wie in VII. so hat man solchergestalt den zweyten Theil der Wurzel richtig gefunden.

VIIII. Ist $S < R$, so ist die gesuchte Wurzel grösser als die gefundene Zahl, aber nicht um eine Einheit, und fällt also zwischen zwo ganze nur um 1 unterschiedene Zahlen, die sich solchergestalt angeben lassen. Denn alsdenn ist der Würfel der gefundenen Zahl kleiner als N und der Würfel einer Zahl, die um 1 mehr ist als die gefundene, grösser.

Exempel N

	185	193	a b / 5 7
a^3 =	125		
R =	60	193	
$3a^2$ =	(75)		
$3a^2b$ =	525		
$3ab^2$ =	735		
b^3 =	343		
S =	60193		

35. Aufg. Den Würfel einer Wurzel, die drey oder mehr Theile hat, zu finden.

Aufl. Für eine dreytheilichte Wurzel $p+q+r$ setze man $p+q=a$; $r=b$ so ist (28).

$a^3=(p+q)^3=p^3+3p^2q+3pq^2+p^3$

$3a^2b=3.(p+q)^2.r$

$3ab^2+b^3=3.(p+q)r^2+r^3$

Und so erhellet, daß der Würfel einer vielheitlichten Wurzel, die Würfel aller Theile, die dreyfachen Producte aus dem Quadrate jeder Summe aller vorhergehenden Theile in den nächstfolgenden und die dreyfachen Producte aus jeder Summe aller vorhergehenden Theile in das Quadrat des nächstfolgenden enthalte. Es sey nähmlich $M=p+q+r+s+t$ . . . wo so viel Theile als man will folgen mögen. Ferner sey $A=(p+q)^3=p^3+3p^2q+3pq^2+q^3$; $B=(p+q+r)^3$; $C=(p+q+r+s)^3$; $D=(p+q+r+s+t)^3$ u. s. f.

So

So kann man, wenn man B finden will; $p+q$ als den ersten Theil der Wurzel und r als den andern ansehen; also ist $B = A + 3.(p+q)^2.r + 3.(p+q)r^2 + r^3$ So kann man für C; $p+q+r$ als der Wurzel ersten Theil und f für den zweyten ansehen, und bekömmt $C = B + 3.(p+q+r)^2.f + 3.(p+q+r).f^2 + f^3$ Für D sind $p+q+r+f$ zusammen der erste Theil und t der andere; also $D = C + 3.(p+q+r+f)^2.t + 3.(p+q+r+f).t^2 + t^3$ u. s. w. Der Würfel von M ist A, B, C, D, u. s. f. nachdem die Wurzel 2, 3, 4, 5 u. s. f. Theile hat; Man kann nähmlich allezeit alle Theile der Wurzel weniger dem letzten $= a$ und den letzten $= b$ setzen, und so nach (28) verfahren.

36. Zus. Es sey $p = e.10^n$ $q = f.10^{n-1}$; $r = g.10^{n-2}$ wo also e, f, g, Zifern von nach einander folgenden Ordnungen sind; so ist $A = e^3.10^{3n} + 3e^2f.10^{3n-1} + 3ef^2.10^{3n-2} + f^3.10^{3n-3}$ hier ist der letzte Theil oder der Würfel von q, von der niedrigsten Ordnung unter allen. Und wie dieses daraus fliesst, daß p um eine Ordnung höher als q ist, so kann man $p+q$ zusammen als von der Ordnung $n-1$ ansehen, (l. 27.) da denn eben so erhellet, daß r^3 in B von der niedrigsten Ordnung ist; Und so $p+q+r$ als zusammen von der Ordnung $n-2$ angesehen, daß f von der niedrigsten Ordnung ist, wenn $n-3$ die Ordnung von f ist. In einer Zahl also,

die mit Ziffern nach einander folgender Ordnungen geschrieben ist, ist der Würfel der niedrigsten Ziffer, der niedrigste Theil in dem Würfel der Zahl.

37. Zus. M sey eine mit Ziffern von nach einander folgenden Ordnungen geschriebene Zahl; ein Theil dieser Zahl, welcher die höhern Ziffern bis mit auf die Ordnung n in sich begreift, heisse N und dieses Theils niedrigste Ziffer, ohne ihren Werth wegen der Stelle betrachtet, sey e. oder der niedrigste Theil von N sey e. 10^n; Nach N folge f. 10^{n-1} = q so daß M = N + f. 10^{n-1} + O = N + q + O wo O alle folgende Theile von M bedeutet, um die ich mich jetzo nicht bekümmere. Der Würfel von M wird also das Stück $N^3 + 3N^2 . f. 10^{n-1} + 3N . f^2 . 10^{2n-2} + f^3 . 10^{3n-3} = N^3 + 3N^2 q + 3Nq^2 + q^3$ enthalten, worinnen O noch nicht vorkömmt. In diesem Stücke wird von N^3 der niedrigste Theil $e^3 . 10^{3n}$ seyn, (36) von N^2 ist der niedrigste Theil $e^2 . 10^{2n}$ (12) also von $3N^2 q$ der niedrigste Theil $3 e^2 f . 10^{3n-1}$; imgleichen ist von 3Nq, der niedrigste Theil $3 ef^2 . 10^{3n-2}$, und $q^3 = f^3 . 10^{3n-3}$; Also sind die Theile, aus denen der Würfel von N + q, ein Stück des Würfels von M besteht, von den Ordnungen 3n; 3n-1; 3n-2; 3n-3; Jeder dieser Theile nähmlich kann auch Ziffern höherer Ordnungen enthalten; aber man bringt sie wie in I. 27. alle auf die niedrigste Ordnung dieses Theils.

38.

Digitized by Google

38. Zuſ. Wenn man die Ziffern, mit denen M^3 geſchrieben iſt, in Claſſen, von der rechten gegen die linke abtheilt, daß in jede Claſſe drey Ziffern kommen, ſo ſtehen nach der niedrigſten Ziffer von N^3, n Claſſen, nähmlich 3 n Ziffern zur rechten. Die höchſte Ziffer in der Claſſe, die nach N^3 zur rechten folgt, iſt von der Ordnung 3 n-1, und in ihr fängt ſich alſo $3 N^2 . q$ an; und erſtreckt ſich weiter zur linken in höhere Ziffern. In der mittlern Ziffer erwähnter Claſſe, als in der Ordnung 3 n-2 fängt ſich $3 N . q^2$, und in der letzten q^2 an (37).

39. Zuſ. M bedeute eine Zahl, deren höchſte Ziffer von der Ordnung n iſt; Dieſer höchſten Ziffer Würfel kann drey Ziffern haben, (I. 49.) ſeine niedrigſte Ziffer iſt von der Ordnung 3 n (37) d. i. es folgen 3 n Ziffern rechter Hand nach ihr, (I. 28.) alſo können nach ſeiner höchſten Ziffer 3 n+2 Ziffern folgen, oder ſie kann von dieſer Ordnung ſeyn. Und alſo kann die Zahl aller Ziffern, die in M^3 enthalten ſind, nicht weniger als 3 n+1 ſeyn, aber bis auf 3 n+3 ſteigen. Höher aber nicht. Denn M iſt kleiner als eine einzige Einheit von der Ordnung n+1; Aber der Würfel einer Einheit von der Ordnung n+1 iſt eine Einheit von der Ordnung 3 n+3 (I; 50.) d. i. eine 1, nach der 3 n+3 Nullen folgen. Hätte nun M^3 mehr als 3 n+3 Ziffern, ſo enthielte ſie eine Ziffer wenigſtens von der Ordnung 3 n+3, dieſe

Ziser könnte nicht geringer als 1 seyn, und nach ihr folgten 3 n + 3 Ziser, die nicht lauter Nullen seyn könnten, da M verschiedene Zifern enthalten und nicht selbst eine Eins mit Nullen seyn soll. Aber eine 1, nach der so viel Ziser, die nicht lauter Nullen sind, folgen; ist mehr als eine 1, nach der nur so viel Nullen folgen. Also wäre M^3 mehr als der Würfel einer Einheit von der Ordnung n + 1; und soll doch weniger seyn. Also hat M^3 nicht mehr als höchstens 3 n + 3, und wenigstens 3 n + 1 Zifern.

40. Aufg. Aus einer ganzen Zahl Q die Cubikwurzel zu ziehen.

Aufl. I. Man theile die Zahl in Classen von drey Zifern, von der rechten Hand gegen die linke. In der höchsten Classe können auch nur eine oder zwo Zifern stehen. Die Würzel hat so viel Zifern, als Classen herauskommen (39).

II. Aus den beyden höchsten Classen suche man die beyden höchsten Theile der Wurzel (p, q) wie in (34).

III. Was von diesen Classen nach Beobachtung der Regeln in 34 übrig bleibt, nehme man zu der folgenden Classe, und sehe die schon gefundenen Zifern als den ersten Theil der Wurzel (p + q), die, welche man zunächst finden soll r als den andern an; So findet man die dritte Zifer nach dem II. u. f. Abs. von 34. Und eben so die vierte Zifer f wenn man sie als den andern Theil und die gefundenen drey als den ersten an-

ansieht, und so weiter fort, so lange noch Ziffern zu finden sind.

Exempel.

Q. (p q r f
158 | 164 | 877 | 312 (5 4 0 8

$p^3 = 125$

$R = 33\ 164$

$3p^2 = (7\ 5)$

$3p^2q = 30\ 0$

$3pq^2 = 2\ 40$

$q^3 = 64$

$A - p^3 = 3246\ 4$

$S = 700877$

$3.(p+q)^2 = (8748)$

$B - A = 0$

$T = 700877312$

$3.(p+q+r)^2 = (874800)$

$3.(p+q+r).f = 6998400$

$3.(p+q+r).f^2 = 103680$

$f^3 = 512$

$C - B = 700877312$

0

Der Beweis ist in (38) enthalten: die Bedeutung der Buchstaben A, B, C ist wie in (35).

41. Lehrs. Von $\frac{u}{x}$ (24) kann der Würfel keine ganze Zahl seyn.

Bew. Es sey $=q$ einer ganzen Zahl, so ist $\frac{u}{x} = qx^2$ eine ganze Zahl. Also müsste wie in 24, jedes der drey u einen Factor vom x enthalten, und wenn jedes einen Factor enthält, so enthält es die andern beyden auch; wider das, was angenommen wird.

42. Zus. Der 26. §. gilt auch von Cubikwurzeln, und überhaupt von Wurzeln aller Grade (I. 47.).

43. Aufg. Aus einer ganzen Zahl, deren Cubikwurzel keine ganze Zahl ist, diese Wurzel durch Näherung zu finden.

Aufl. Wenn man die Wurzel in Zehntheilchen haben will, so sehe man die Zahl als einen Würfel von Zehntheilchen an, der also Tausendtheilchen enthalten muß, d. i. man schreibe an sie nach der Stelle der Einer, drey Nullen. Und aus eben dem Grunde zweymahl drey Nullen, wenn man die Wurzel bis auf Hunderttheilchen verlangt, und 3n Nullen, wenn man sie, bis auf Decimalbrüche von der Ordnung $-n$ verlangt (II. 9.). Uebrigens verfahre man nach (40) denn man kann solchergestalt die Cubikwurzel als eine ganze Zahl ansehen, deren Einheit von der Ordnung $-n$ ist.

Exem-

Digitized by Google

Exempel.

$= 67,000$ (p q r f
4, 0 6 1

$p^3 = 64$

3,000

$3p^2 = (48)$

3,000000

$3.(p+q)^2 = (4800)$
$3.(p+q)^2.r = 28800$
$3.(p+q)r^2 = 4320$
$r^3 = 216$

2,923416

76184000

$3.(p+q+r)^2 = (49408)$
$3.(p+q+r)^2.f = 49408$
$3.(p+q+r).f^2 = 1218$
$f^3 = 1$

49462981

27121019

$(p+q+r+f)^3 = 66,972878981$

Probe 67,

44. Anm. Wenn man von allen Zahlen nach der Reihe, die Quadrate und Würfel macht, so entstehen daraus Quadrat- und Cubiktafeln, in welchen man alsdenn eine vorgegebene Zahl, die die Grenzen dieser Tafeln nicht überschreitet, nur aufsuchen darf, um entweder ihre Wurzel, oder die ganze Zahl, welche der Wurzel am nächsten kömmt, zu finden. Bey den zur Trigonometrie nöthigen Tafeln des Freyherrn v. Wolf gehen sie bis auf die Wurzel 1000, also

Digitized by Google

also ist das grösste Quadrat daselbst eine Million und der grösste Würfel 100 Millionen. So weit auch in Lamberts Zusätzen zu den trigonometrischen Tafeln, und Schulzens Tafeln. In Joh. Paul Buchners Tabula radicum, quadrator. et cubor. gehen sie bis auf die Wurzel 12000. Joh. Ludolfs Tetragonometria tabularia Ien. 1712 enthält nur die Quadrate aller Wurzeln bis auf 100000. Quadrate und Würfel der Wurzeln bis 10000; Prestet Elem. des Math. Par. 1695 II Volume p. 444 . . . 474.

45. Anm. Ein Gebrauch dieser Tafeln ist, die ersten Zifern der Irrationalwurzeln zu finden, wobey man merken muß, wie viel Decimalstellen die Potenzen bekommen (III. 9). Z. E. man sucht die ersten Zifern $\sqrt[3]{7}$; Also muß man unter den Würfeln in der Tafel einen aufsuchen, wo 3, oder 6, oder 9 u. s. f. Zifern nach der 7 folgen. In den Wolfischen Tafeln findet man $7077888 = (192)^3$ also wird $7{,}077888 = (1{,}92)^3$ und da dieses mehr als 7 ist, so nehme man den nächst kleinern Würfel 6967871, der 191 zur Wurzel hat. Also ist $(1{,}91)^3 = 6967871$ und $\sqrt[3]{7} =$ fällt zwischen 1,91 und 1,92. Vermittelst der Buchnerischen findet man $\sqrt[3]{6989782529} = 1912$ also $\sqrt[3]{7} = 1{,}912$. Die Buchnerischen sind so voller Fehler, daß man sie erstlich durch und durch ausbessern muß, ehe man sie sicher brauchen kann. Die Algebra zeigt Wege, solche Tafeln leicht durch die Addition zu verfertigen.

46. Anm. Wenn man aus einem Decimalbruche oder aus einem Ganzen, an dem Decimalbrüche hängen, die Wurzeln in Decimaltheilen ziehen soll, so muß die gegebene Zahl, Paare von Decimalzifern enthalten, wenn man die Quadratwurzel, und Decimalzifern nach dreyen, wenn man die Cubikwurzel sucht

sucht, wenn also bey ihr, wie sie gegeben wird, sich dieses nicht so verhält, so muß man die fehlenden Stellen mit Nullen ausfüllen. Folgt aus I; 77. Z. E. für $\sqrt{5{,}723}$ könnte man zwar sagen $5{,}723 = \frac{5723}{1000}$ aber da wäre die Quadratwurzel $\frac{\sqrt{5723}}{\sqrt{1000}}$ daß man beyde Wurzeln mühsam ausziehen müsste. Drückt man hingegen die Zahl so aus: $5{,}7230 = \frac{57230}{10000}$ so ist die Quadratwurzel $= \frac{\sqrt{57230}}{100}$.

So wäre $\sqrt[3]{7{,}5} = \frac{\sqrt[3]{75}}{\sqrt[3]{10}}$ aber $\sqrt[3]{7{,}500} = \frac{\sqrt[3]{7500}}{10}$.

Quadrat- und Cubikwurzeln aus den ersten 1000 Zahlen bis auf Zehnmillionntheile von Hrn. Röhl berechnet finden sich in Schulzens Tafeln, auch sonst Tafeln von Potenzen; imgleichen in Vega Tafeln.

47. **Anm.** Wenn eine von den Zifern der Zeile A die niedrigste einer ganzen Zahl ist; so ist die darunter stehende Zifer der Zeile B die niedrigste des Würfels dieser Zahl (29. und I. 49.).

A; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9;
B; 0; 1; 8; 7; 4; 5; 6; 3; 2; 9;

Hieraus folgt, daß man von jeder Cubikzahl, die nur zwo Classen giebt (34), die beyden Zifern der Wurzel ohne die gewöhnliche Ausziehung finden kann. Die erste giebt sich nach 34. I. Abs. und die zweyte aus der Endzifer. Z. E. von der Cubikwurzel aus 658 503 ist die erste Zifer, vermöge der ersten Classe 8; und die zweyte 7, weil 3 in B unter 7 in A steht. Dieses geht aber nur an, wo die gegebene Zahl in der That ein Würfel einer Zahl von zwo Ziffern ist. Mehrere Betrachtungen über die Endzifern und Re-

geln,

Digitized by Google

geln, die Rationalwurzeln daraus zu finden, enthält: A. C. v. H. ganz neue entdeckte Art, wie aus jeder Cubikzahl, welche nicht über 1000 Billionen geht, die Cubikwurzel zu erforschen: (Dessau 1755): Man kann aber diese Vortheile bey den gemeinen Cubiktafeln grossentheils, und bey den Buchnerischen völlig entbehren. Nach der hier gewiesenen Art läßt sich eine Cubikwurzel aus den gemeinen Tafeln finden, wenn sie vier, und aus den Buchnerischen, wenn sie fünf Ziffern hat.

48. Anm. Für die Wurzeln von höhern Graden (I. 47.) lassen sich eben so Regeln aus der Zusammensetzung ihrer Potenzen herleiten, die aber in der gemeinen Rechenkunst nicht gebraucht werden; und die man im benöthigten Falle zu finden, in der Algebra lernt. S. Clauii Geom. Pract. L. VI. P. 19. und Peschecks Wurzelmann.

49. Anm. Den Irrationalzahlen, die von Wurzeln herrühren (42), kann man sich, so weit man will, nähern (27. 43. 48.) daß dasjenige, was noch an dem völligen Werthe einer solchen Zahl mangelt, kleiner wird als jede Grösse, die sich angeben läßt, (data quavis quantitate minus). Und also kann man allemahl Rationalzahlen finden, die sich zu jedem Gebrauche in der Ausübung ohne den geringsten merklichen Fehler statt ihrer setzen lassen: Die Lehrsätze aber von den Rationalzahlen kann man allezeit auch auf diese Irrationalzahlen anwenden, wenn man nur setzt, daß diese Näherung ohne Ende fort geschehen könne. Denn man kann die Irrationalzahl als aus zwey Stücken zusammengesetzt ansehen, davon das eine, ihr Anfang, rational ist, und sich nach Gefallen forttreiben läßt, so daß das andere Stück, ihr Ende, welches in völliger Schärfe immer unbekannt bleibet, doch kleiner wird als jede angegebene Grösse. So beträgt das, was an $\sqrt{3}$ (27) fehlt, weniger als 0,000001. Es sey also X eine Irrationalzahl,

Digitized by Google

A ihr rationaler Anfang, a ihr unbekanntes Ende, so muß alles von X wahr seyn, was von einer unbestimmten Rationalzahl wie A, wahr ist, denn dieses A kann einen so beträchtlichen Theil von X ausmachen als man will, gegen welchen a immer kleiner und kleiner werden, und also so zu reden verschwinden kann.

50. Anm. Will man also eine Irrationalzahl nach Art der Brüche (I. 53.) durch eine ganze Zahl ausdrucken, so muß man für die Einheit, die sie messen soll, immer kleinere und kleinere Theile der ganzen 1 annehmen, von denen die Irrationalzahl immer grössere und grössere Mengen enthält. So ist $\sqrt{3} = 17.\frac{1}{10} = 173.\frac{1}{100} = 1732.\frac{1}{1000}$ u. s. w. daß immer noch etwas fehlt, und sich die Menge der Einheiten, durch welche $\sqrt{3}$ genau gemessen würde, so wenig als die Grösse einer solchen Einheit vollkommen angeben läßt. Wenn man die 1 ohne Ende immer in kleinere Theile theilet, und von diesen kleinen Theilen immer grössere Mengen nimmt, so kömmt man der Irrationalzahl immer näher, erreicht sie aber nie völlig. Man kann sie also als eine unzählige Menge unendlich kleiner Theile ansehen. Wer ihr dieserwegen den Nahmen einer Zahl abspräche, müßte solches auch bey Brüchen (III. 5.) thun.

51. Anm. Ich habe diese Betrachtungen über die Irrationalzahlen deßwegen ausführlicher vorgetragen, um zu zeigen, daß gewisse Sätze des I. Cap. nicht nur von ganzen Zahlen, sondern von allen überhaupt richtig sind. Die meisten Schriftsteller nehmen diese Allgemeinheit ohne Beweis an, welches mir nicht sorgfältig genug verfahren scheinet. Ich habe dieserwegen diese Sätze I. 82. u. f. von Brüchen umständlich erwiesen. Daß sie nun auch von Irrationalzahlen gelten, folgt daraus, weil man von jeder Irrationalzahl einen so beträchtlichen rationalen Theil, als man will, finden kann, und diese Sätze allemahl

von

Digitized by Google

von dem ersten Stücke einer Irrationalzahl wahr sind, da nun dieses, so weit man will, getrieben werden kann, so kann das Ende der Irrationalzahl, ihr unbekanntes zweytes Stücke, nichts enthalten, das diese Sätze falsch machte: Denn man kann in dieses zweyte Stücke, so zu reden, so weit man will, hineingehen, und das übrige Unbekannte darinnen, so weit man will, vermindern. Ferner kann man auch die Irrationalzahl, vorhin gelehrtermassen, zwischen zwo Rationalzahlen einschränken, die einander so nahe kommen können, als man will, wie $\sqrt{3}$ zwischen 1,7320508 und fallen muß, deren Unterschied nur 1,7320509
0,0000001 beträgt. Was also von diesen Gränzen, die man nach Gefallen vereugern kann, wahr ist, das muß auch von dem dazwischen enthaltenen wahr seyn.

Man setze X, Y, sind zwo Irrationalzahlen, A, B, ihre gefundenen rationalen Theile, a, b, die Enden, die man nie völlig finden wird; so daß $X = A + a$; $Y = B + b$; gesetzt nun I. 10. gelte nicht von Irrationalzahlen, oder es wäre nicht $X.Y = Y.X$, so müßte man, wenn man A und B ohne Ende fortsuchte, nothwendig so weit kommen, daß einmahl $A.B$ nicht $= B.A$ wäre, wieder (I. 83) und so verhält es sich mit den übrigen Sätzen auch.

V. Capitel.
Von den Verhältnissen.

1. Erkl. Wenn man durch die Subtraction untersucht, um wieviel eine Zahl grösser als die andere ist; so betrachtet man diese beyden

den Zahlen in ihrer arithmetischen Verhältniß; (ratio arithmetica).

$$20 - 5 = 15.$$

2. Erkl. Wenn man aber durch die Division untersucht, wievielmahl eine Zahl in der andern enthalten ist, oder was für ein Theil von einer in der andern steckt, so betrachtet man sie in ihrer geometrischen Verhältniß (ratio geometrica).

$$\frac{20}{5} = 4; \quad \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

3. Anm. Nach dem Gebrauche der Alten gehört nur der geometrischen, der Nahme Verhältniß; die Neuern haben ihn auch der arithmetischen Vergleichung zweer Zahlen beygelegt. Daher pflegt man noch allemahl die geometrische Verhältniß zu verstehen, wenn dieses Wort, ohne eines von beyden Beywörtern, gesetzt wird.

4. Erkl. Man sieht in jeder Verhältniß (E. 1. 2) ein Glied als das vorhergehende (antecedens terminus) und das andere als das folgende (consequens) an. Die Ordnung ist vollkommen willkührlich.

5. Zus. Wenn zwey Paar Zahlen einerley Unterschied haben, so hat das vorhergehende Glied zum folgenden bey dem einen Paare eben die arithmetische Verhältniß wie bey dem andern. Und man kann also diese arithmetische Verhältnisse gleich oder ähnlich nennen, weil sie sich durch nichts unterscheiden.

$$20 - 15 = 35 - 30$$

$$a - (a+d) = b - (b+d)$$

Es schadet nichts, wenn die folgenden Glieder grösser sind als die vorhergehenden (I. 83).

6. Erkl. Die Gleichheit zwoer arithmetischen Verhältnisse heisst eine arithmetische Proportion (proportio arithmetica). Ihr natürlichstes Zeichen ist das, das ihre Erklärung ausdruckt, welches der Freyh. v. Wolf gebraucht. Sonst auch 20. 15. ∴ 35. 30. Sie enthält vier Glieder, da das erste und vierte; (hier 20; 30;) die äusern, das zweyte und dritte die mittlern heissen.

7. Zus. In einer arithmetischen Proportion muß gleichviel herauskommen, wenn man das zweyte Glied vom ersten, und wenn man das vierte vom dritten abzieht. Oder auch wenn man das erste vom zweyten, und das dritte vom vierten abzieht (5). Wenn man also das erste und dritte Glied willkührlich annimmt, so muß man beyde um einerley Differenz vergrössern oder vermindern, das zweyte und vierte zu erhalten: dieses zeiget, daß das Exempel in Buchstaben (5) alle arithmetische Proportionen ausdruckt. Sollen die folgenden Glieder der arithmetischen Verhältnisse kleiner seyn als die vorhergehenden, so ist d verneinend.

8. Erkl. Wenn bey einer arithmetischen Proportion das zweyte und dritte Glied einerley sind, so heisst sie stetig oder zusammenhängend (continua) 12 — 7 = 7 — 2. Das Glied, das

das hie zweymahl vorkömmt, heisst das mittlere wie 7, zwischen den beyden äusern 12, 2.

9. Zus. Also ist in (5) $a+d=b$; folglich $b+d=a+2d$; und jede stetige Proportion lässt sich so ausdrücken $a-(a+d)=a+d-(a+2d)$.

10. Lehrs. In jeder arithm. Proportion ist die Summe der beyden äusern Glieder, der Summe der beyden mittlern gleich.

Bew. Denn $a+b+d=a+d+b$ (5. 7.).

11. Zus. In der stetigen ist die Summe der äusern noch einmahl so groß als das mittlere, das zweymahl vorkömmt; $a+a+2d=2.(a+d)$ (9).

12. Zus. Man findet also da das mittlere, wenn man die Summe der äusern halbirt. Z. E. zwischen 39 und 47 ist das mittlere Glied $\frac{39+47}{2}=43$ und $47-43=43-39$.

13. Anm. Dieses Verfahren ist sehr gebräuchlich, wenn von einerley Grösse verschiedene Werthe angegeben werden, deren keinen man vorzüglich zu wählen Grund hat, da man denn solchergestalt einen sucht, der vermuthlich von der Wahrheit nicht weit abweichen kann.

Von der geometrischen Verhältniß und Proportion.

14. Willk. S. Man drücke eine Verhältniß wie einen Quotienten aus (I. 30.); als 20:5

Digitized by Google

das vorhergehende Glied (4) wird zur linken gesetzt.

15. Anm. Die Ursache des Zeichens giebt (8). Indessen sind Verhältnisse und Quotienten nicht einerley, daher man eigentlich dieses Zeichen den ersten allein lassen, und für die letztern nur das (I. 61.) brauchen sollte. Das erste aber ist oft bequemer, und man kann leicht vermeiden, daß keine Zweydeutigkeit entstehet.

16. Erkl. Wenn $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ so hat a zu b eben die Verhältniß wie c zu d (2). Man kann also diese beyden Verhältnisse ähnlich, oder gleich nennen, oder es ist a:b = c:d (14).

17. Erkl. Die Gleichheit zwoer Verhältnisse heißt eine Proportion. Diese erfodert also vier Glieder. Aeusere und mittlere heissen wie (6). Und wenn b = c heißt sie zusammenhängend oder stetig (8). Die beyden vorhergehenden Glieder a, c, oder die beyden folgenden b, d, heissen jedes Paar für sich, gleichnahmige, oder ähnlich liegende (homologi).

18. Zus. Ihr natürlichstes Zeichen ist das in (16) und zuerst vom Freyherrn v. Leibnitz gebrauchte, welches die Erklärung selbst ausdrückt (14). Sonst auch a. b : : c. d.

19. Zus. Wenn $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ so ist auch $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$; also auch d:c = b:a (16).

20.

20. Zuf. Wenn $F.f = P$; so ist $1 : f = F : P$. (I. 10.) und wenn $\frac{D}{d} = Q$; so ist $d : D = 1 : Q$ (I. 13.). Dieses sind allgemeinere Erklärungen der Multiplication und Division, die auch Brüche (I. 75. 78.) und Irrationalzahlen (IIII. 49.) unter sich begreifen.

21. Lehrs. Wenn zwo Zahlen mit einerley multiplicirt oder dividirt werden, so bleiben die Producte oder Quotienten in eben der Verhältniß.

Beweis. Die Producte oder Quotienten geben, mit einander dividirt, eben das, was die Zahlen selbst geben. (I. 61. 65. 67.).

$$\frac{ma}{mb} = \frac{a}{b} \text{ also } ma : mb = a : b$$

Nun kann m einen Bruch bedeuten, dessen Zähler 1, der Nenner eine ganze Zahl ist, so erhellet der Satz für die Division (I. 61.).

22. Zuf. Zweene Brüche verhalten sich wie die beyden ganzen Zahlen, die ihre Zähler abgeben, nachdem man sie auf eine Benennung (I. 72.) gebracht hat (I. 53).

$$\frac{7}{3} : \frac{5}{4} = 7.4 : 5.3 = 28 : 15$$

23. Erkl. Verhältnisse heissen rational oder irrational, nachdem der Quotiente (8) beschaffen ist (IIII. 26. 49.).

So ist die Verhältniß $15 : \sqrt{3}$ irrational.

Digitized by Google

24. Zuſ. Verhältniſſe zwiſchen Irrationalzahlen können rational ſeyn; $2\sqrt{3} : 7\sqrt{3} = 2 : 7$ alle Rationalverhältniſſe aber laſſen ſich durch ganze Zahlen ausdrücken (22).

25. Zuſ. Man kann Irrationalverhältniſſe beynahe durch Rationalverhältniſſe ausdrücken, und dieſe Näherung ſo weit treiben als man will. (IIII. 49.).

Die angegebene iſt ohngefähr $= 15 : 1$ genauer $150 : 17$; noch genauer $1500 : 173$. u. ſ. w. (IIII. 27).

26. Erkl. Der Exponent oder Nahme (exponens ſ. nomen) einer Verhältniß heiſſt die Zahl, welche andeutet, wie vielmahl das vorhergehende Glied im folgenden enthalten iſt.

als 4 bey $5 : 20$.

27. Zuſ. Er kann ein Bruch von beyderley Art ſeyn, (IIII. 57. 58.) auch eine Irrationalzahl (23) wo man ihn der Wahrheit immer näher und näher ausdrücken kann (IIII. 48.).

Bey $20 : 5$ iſt er $\frac{1}{4}$: und $2\frac{1}{2}$ bey $27 : 57$, und $\frac{1}{4}\sqrt{3}$ bey $20 : 5\sqrt{3}$; da er alſo:

0, 4; 0, 43; 0, 433 u. ſ. w. werden kann.

28. Zuſ. Das folgende Glied iſt ein Product aus den vorhergehenden in den Exponenten; a : ma.

29. Zuſ. Zwo gleiche Verhältniſſe haben einerley Exponenten (19) und wenn a, ma, b, drey Glieder einer Proportion ſind, ſo muß das vierte mb ſeyn (17).

30.

Digitized by Google

30. Zuſ. Bey der ſtetigen (17) iſt $b = ma$ und $mb = m^2a$.

31. Lehrſ. Wenn vier Zahlen eine Proportion ausmachen, ſo iſt das Product der beyden äuſern Glieder dem Producte der beyden mittlern gleich.

Bew. Es ſey $A : B = C : D$; ſo iſt $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ (17) alſo $\frac{A.D}{B.D} = \frac{C.B}{D.B}$ (IIII. 49) und $B.D = D.B$ (IIII. 49) alſo $A.D = C.B$;

32. Zuſ. Wenn $B = C$, iſt $A.D = B^2$ und $B = \sqrt{A.D}$. So wird zwiſchen zwo Zahlen eine mittlere geometriſche Proportionalzahl gefunden: Wenn $A = 1$ alſo $D = B^2$ ſo folgt hieraus, daß die Quadratwurzel die mittlere geometriſche Proportionalzahl zwiſchen 1 und dem Quadrate; das Quadrat aber die dritte geometriſche zu 1 und der Wurzel iſt.

33. Lehrſ. Wenn zwey Producte gleich ſind, ſo kann man aus ihnen eine Proportion machen, von der das eine Product, welches man will, die mittlern Glieder, das andere die äuſern giebt. Aus $A.D = B.C$ folgt $A : B = C : D$.

Bew. Denn es iſt $\frac{A.D}{B.D} = \frac{B.C}{B.D}$; alſo $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ (IIII. 49.) folglich $A : B = C : D$ (17).

Digitized by Google

34. Lehrſ. Wenn $A:B=C:D$ ſo iſt

I. Verwechſelt (permutando ſ. viciſſim) $A:C=B:D$; denn $A.D=B.C$ (31) alſo $\frac{A.D}{D.C}=\frac{B.C}{D.C}$ oder $\frac{A}{C}=\frac{B}{D}$

II. Der vorhergehenden und der folgenden Glieder Summen oder Unterſchiede genommen. (antec. & conſequ. ſummando vel differentiando).

$$A\pm C:B\pm D=A:B.$$

Denn $A.D=B.C$ alſo $A.D\pm C.D=B.C\pm C.D$ oder $(A\pm C).D=(B\pm D).C$; alſo nach (33).

$$A\pm C:B\pm D=C:D=A:B.$$

III. Umgekehrt, convertendo

$$A:A-B=C:C-D.$$

denn $A:C=B:D$ (I.) alſo

$A:C=A-B:C-D$ (II.) woraus III. nach I. wird.

IIII. Zuſammengeſetzt und getheilt, componendo & dividendo.

$$A\pm B:B=C\pm D:D.$$

denn $A:C=B:D$ (I.) alſo

$A\pm B:C\pm D=B:D$ (II.) alſo

$A\pm B:B=C\pm D:D$ (I.).

35. Aufg. Zu drey Zahlen A, B, C, die vierte Proportionalzahl D zu finden; ſo daß $A:B=C:D$.

Auflöſ. Man multiplicire die zweyte und dritte, das Product dividire man durch die erſte, ſo kömmt die vierte. Bew.

Digitized by Google

Beweis. D. $A = B.C$ (31) also

$$D = \frac{B.C}{A} \text{ (I. 16.).}$$

36. Zus. Wenn zu zwo Zahlen die dritte (17) gesucht wird, ist $B = C$ und $D = \frac{B.B}{A}$

37. Anm. Man heißt dieses die Regel Detri. Sie ist von mendlichem Gebrauche. Sie setzt zum voraus, daß von den vier Zahlen, von denen die Frage ist, (termini quaestionis) zwo sich wie die zwo übrigen verhalten. Z. E. Mengen von einerley Waare wie ihre Werthe, Arbeiten wie die Zeiten u. s. w.

Als: Wenn 3 Pfund 7 Thlr. kosten, was kosten 50 Pfund?

$$3 \text{ Pf}: 50 \text{ Pf.} = 7 \text{ Thlr}: \frac{7.50}{3} \text{ Thlr.}$$

kömmt $116\frac{2}{3}$ Thlr.

Die Rechenmeister pflegen dieses so zu setzen:

3 Pf. — 7 Thlr. — 50 Pf.

und übrigens eben die Regel der Auflösung (35) zu beobachten, daß sie also eben das herausbringen. Weil man nähmlich 3; 50|7, nebst der vierten gesuchten nur als Zahlen, die eine Proportion machen, betrachten darf, ohne daran zu denken, daß sie sich auf verschiedene Einheiten beziehen, so ist diese Verwechselung erlaubt, (34. I.) sonst aber taugt diese Ordnung nichts, weil 3 Pf; 7 Thlr. keine Verhältniß geben kann, da von diesen Dingen keines in denen andern stecken kann. Und die mathematische Ordnung der Glieder hat den Vortheil, daß sie uns gleich darauf führt, die Proportion bey den Zahlen aufzusuchen, wo wir die Regel Detri anbringen wollen, und sie also weder da anzubringen, wo sie nicht hingehört, noch auch, wo sie hingehört, sie falsch anzubringen.

Digitized by Google

38. Anm. In genannten Zahlen ist zuweilen nöthig, die Glieder auf einerley Einheiten zu bringen. Z. E. 3 Pf. 7 Loth: 20 Pf. 13 Loth 2 Quentchen = 7 Thlr. 3 Gr; hier ist das erste Glied = 103 Loth = 412 Quentchen, das zweyte 2614 Qu. das dritte 171 Groschen: also $412 : 2614 = 171 : \frac{171 \cdot 2614}{412}$ das vierte Glied wird $1084\frac{386}{412}$ Gr. Der Bruch auf Pfennige gebracht, ist nach (I. 70. 81.) $\frac{193}{206} \cdot 12$ Pf. $= \frac{193 \cdot 6}{103} = 11\frac{25}{103}$ Pf. und die ganze Zahl 45 Thlr. 4 gr.

39. Anm. Diese Reduction ist nur nöthig, die Verhältnisse zu übersehen, und die Multiplication und Division zu verrichten; man kann sie also ersparen, wenn das erste oder dritte Glied 1; und das eine von diesen beyden keine allzugrosse Zahl ist. Z. E.

1 Pf. kostet 3 Thlr. 8 gr. 6 pf. was 5 Pf.

5

16 18 6

Ja es findet dieses auch statt, wenn gleich das erste Glied nicht 1 ist. Wenn es hier 3 wäre, so käme das vierte Glied 5 Thlr. 14 gr. 2 pf.

40. Anm. Wenn sich das erste und zweyte Glied, oder das erste und dritte mit einerley dividiren lassen, so braucht man statt ihrer diese Quotienten, und erhält eben das vierte Glied (21 und 34 I); als

12 : 16 : 20 = 33 : x
3 : 5 = 33 : x
1 : 5 = 11 : x; x = 55

41. Anm. Wenn die Zahlen, die gleiche Nahmen haben, um 1 unterschieden sind, giebt es eine Verkürzung, die folgende Exempel lehren

5 Pf. kosten 40 Thlr. was 6 Pf. Antw. $(40 + \frac{40}{5})$ Thlr. = 48 Th. Man kann aber statt dieses Vortheils noch bequemer (40) brauchen. Die-

se

se und ähnliche Vortheile heißt man die welsche Practik. Wer viel rechnet und die Gründe der Rechnungen verstehet, erfindet sie selbst, und einem andern ist nichts an ihnen gelegen.

42. Aufg. Eine Zahl e in zweene Theile zu theilen, die sich wie zwo ganze Zahlen f: g verhalten.

Auflös. Man dividire die Zahl durch die Summe der Glieder der Verhältniß; Der Quotient durch beyde Glieder multiplicirt, giebt die beyden Theile. Nähmlich $\frac{e}{f+g}$. f: $\frac{e}{f+g}$. g = f: g (21) und $\frac{e}{f+g}$ f + $\frac{e}{f+g}$. g = $\frac{e}{f+g}$. (f + g) = e.

Ex. Um 21 nach der Verhältniß 2: 5 zu theilen, kömmt $\frac{21}{7}$. 2 = 6; $\frac{21}{7}$. 5 = 15; aber 6: 15 = 2: 5 und 6 + 15 = 21.

43. Zus. Wenn drey Theile das Ganze ausmachen und sich wie f, g, h, verhalten sollen, so sind sie $\frac{e}{f+g+h}$. f; $\frac{e}{f+g+h}$. g; $\frac{e}{f+g+h}$. h u. s. w. bey mehr Theilen.

44. Anm. Es ist klar, daß diese Auflösung sich auf die Regel Detri bringen läßt; Wenn (43) die drey Theile x, y, z, heissen, so ist f + g + h: e = f: x = g: y = h: z (35).

45.

Digitized by Google

45. **Anm.** Sie lässt sich auch aus (34) herleiten. Es sey $f : g = x : y$ so ist $f + g : g = x + y : y$ (34. IIII.) oder $f + g : x + y = g : y$ (34. I.) Nun sey $g : h = y : z$ oder $g : y = h : z$ (34. I.) so ist $f + g : x + y = h : z$ also $f + g + h : x + y + z = h : z$ (34. II.) $= g : y = f : x$ (34. I.) aber $x + y + z = e$. Für mehr Theile verfährt man eben so. Für zweene Theile setzet man $z = o$ und $h = o$.

46. **Anm.** Die Auflösung gilt für alle Rationalverhältnisse (22) und selbst für die Irrationalverhältnisse (IIII. 51.).

47. **Anm.** Eine von ihren Anwendungen ist die gemeine **Gesellschaftsrechnung**; bey der man aus den Gründen der natürlichen Billigkeit annimmt, was Aristoteles von der **Austheilungsgerechtigkeit** (iustitia distributiva) gelehrt hat, und viele Rechtsgelehrten, ohne Verstand entweder nachsagen oder bestreiten. Man setze, drey Kaufleute haben zusammen gelegt

A; 1000 Thlr. $= f$
B; 700 $= g$
C; 900 $= h$

$2600 = f + g + h$

damit gewonnen 1500 Thlr. $= x + y + z$; so ist $2600 : 1500 = 1000 : x$ oder nach (40)

$$26 : 15 = 1000 : x;\ x = \frac{15 \cdot 500}{13} = 576\ \tfrac{12}{13}$$

$$= 700 : y;\ y = \frac{15 \cdot 350}{13} = 403\ \tfrac{11}{13}$$

$$= 900 : z;\ z = \frac{15 \cdot 450}{13} = 519\ \tfrac{3}{13}$$

48. **Anm.** Mit der Gesellschaftsrechnung ist die **Vermischungsrechnung** (regula alligationis) einerley, wo man findet, wieviel von jeder einfachen Materie zu einer gegebenen Menge der vermischten kömmt, wenn die Verhältnisse der einfachen gegeben sind. Z. E.

nach

Digitized by Google

nach Mieths Geschützbeschreibung II. Th. 40. Cap. gehören bey gutem Schießpulver auf 1 Pf. Salpeter 6 Loth Kohlen und 4 Loth Schwefel. Wenn man alles zu Lothen macht, und die Zahlen, da es hier nur auf die Verhältnisse ankömmt, halbirt, (21) so kömmt für die drey Dinge in der Ordnung, wie sie genannt sind $f = 16$; $g = 3$; $h = 2$; also $f + g + h = 21$. Gesetzt nun, man wollte 1000 Pfund Pulver haben, so ist $x = \frac{16000}{21} = 761\frac{10}{21}$; $y = \frac{3000}{21} = 142\frac{6}{7}$; $z = \frac{2000}{21} = 95\frac{5}{21}$.

Die Probe ist, daß die gefundenen Zahlen das gegebene Ganze wie hie 1000 ausmachen.

49. **Anm.** Zuweilen gehören die ähnlichliegenden Glieder (17) nicht so zusammen wie Waaren und ihr Werth, sondern in einer umgekehrten Ordnung, wenn sich nähmlich ein Paar Grössen verkehrt (reciproce) wie ein Paar andere verhalten. Man nennt dieses die **verkehrte Regel Detri**, (regula trium inversa) und die Rechenkunst kann keine Regeln geben, wenn sie anzuwenden ist, sondern man muß solches aus den Begriffen der Sachen selbst wo man die Regel anbringen will, beurtheilen, daher sich hie die Unentbehrlichkeit der Erinnerung (37) zeigt.

13 Arbeiter vollenden eine gewisse Arbeit in 7 Tagen. Man fragt, wie viel Arbeiter man nehmen muß, eben das in 4 Tagen zu vollenden. Die Zahl dieser Arbeiter mag u heissen. Hie ist offenbahr, daß mehr Arbeiter in der Verhältniß weniger Zeit brauchen, in der ihre Menge grösser ist, daß man also setzen muß

$$4\,\mathfrak{T} : 7\,\mathfrak{T} = 13\,\mathfrak{A} : u$$

$$\text{oder } u = \frac{7 \cdot 13}{4} = 22\,\tfrac{3}{4}$$

Weil

Weil man nicht $\frac{1}{4}$ Arbeiter nehmen kann, (man müsste denn einen, der weniger als die andern arbeitete, dafür rechnen), so muß man die nächst grössere Zahl 23 dafür nehmen.

Die 13 Arbeiter machen in 1 Tage $\frac{1}{7}$ der Arbeit; also macht einer in einem Tage $\frac{1}{7.13}$ der Arbeit; also machen $22\frac{3}{4}$ oder $\frac{91}{4}$ in 4 Tagen $\frac{1}{7.13}$. 91 der Arbeit, d. i. die ganze, weil $7.13 = 91$.

50. Lehrs. Wenn $a : b = c : d$
Und $e : f = g : h$
So ist $ae : bf = cg : dh$

Bew. Wegen der angenommenen beyden Proportionen ist $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ und $\frac{e}{f} = \frac{g}{h}$ (16) (17)
also $\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} = \frac{c}{d} \cdot \frac{g}{h}$; folglich $\frac{ae}{bf} = \frac{cg}{dh}$ woraus die dritte Proportion folgt (17).

Ex. $3 : 6 = 7 : 14$
$5 : 30 = 4 : 24$
$15 : 180 = 28 : 336$

Denn $\frac{15}{180} = \frac{1}{12} = \frac{28}{336}$.

51. Zus. Wenn $e = b$ und $g = d$;
oder $a : b = c : d$
$b : f = d : h$
So ist (21) $a : f = c : h$ (ordinatim & ex aequo).

52.

Digitized by Google

52. Zus. Eben so sey $b = e$ und $c = h$ oder
$a : b = c : d$
$b : f = g : c$
So ist $a : f = g : d$ (perturbate & ex aequo).

53. Aufg. Wenn eine wirkende Ursache C, in der Zeit T, die Wirkung E hervorbringe, und c, t, e, ähnliche Dinge bedeuten, die Verhältniß der Wirkungen zu finden.

Auflös. Wenn die Ursachen gleich sind, so verhalten sich die Wirkungen wie die Zeiten; und wenn die Zeiten gleich sind, wie die Ursachen. Nun sey v die Wirkung der Ursache C in der Zeit t, so ist nach diesen beyden Grundsätzen

$T : t = E : v$
$C : c = v : e$ also nach (50. 21.)
$CT : ct = E : e$.

Oder die Wirkungen verhalten sich wie die Producte aus den Ursachen in die Zeiten.

Ex. 7000 Thlr. geben in 12 Jahren 4000 Interesse, was geben 13000 in 9

Hier ist $C = 7000$; $T = 12$; $E = 4000$; $c = 13000$; $t = 9$; das gesuchte Interesse $= e$ also

$7000 . 12 : 13000 . 9 = 4000 : e$
$7 . 4 : 13 . 3 = 4000 : e$
$7 : 13 . 3 = 1000 : e$

$$e = \frac{13 . 3000}{7} = 5571\tfrac{3}{7}.$$

Man

Man nennt diese Regel, die Regel von fünfen (regulam de quinque) statt ihrer kann eine doppelte Regel Detri dienen, wenn man die Interessen des ersten Capitals in der andern Zeit; das v der Auflös. suchet, und nach den beyden Grundsätzen einzeln verfährt, da man das v aus der ersten Regel Detri, und aus der in der zweyten das e findet. Weil aber v hier oft durch einen Bruch gegeben wird, so ist die Regel von fünfen bequemer. Sonst könnte man auch solche Fälle so berechnen.

7000 Thl. geben in 1 Jahre $\frac{4000}{12} = \frac{1000}{3}$

Interessen; also 1000 Thlr. in 1 Jahre $\frac{1000}{3.7}$

Interessen; also 13000 Thlr. in 1 Jahre $\frac{1000}{3.7}$.

13 und in 9 Jahren $\frac{1000.13.9}{3.7} = \frac{13000.3}{7}$.

54. Anm. Die Aufgabe (53) kömmt unzähligmahl vor; auch wo nicht eben wirkende Ursachen und Wirkungen vorhanden sind, aber doch Dinge, die sich nach den angenommenen beyden Grundsätzen verhalten; z. E. Geschwindigkeiten, Zeiten, Räume; u. s. w.

55. Anm. Auch fliessen aus der Formel des 53. §. mehr Folgerungen. Es sey $E = e$; so ist $CT = ct$ oder $C : c = t : T$ (33) welches die Rechnung des Exempels (49) rechtfertiget. Imgleichen ist $C : c = \frac{E}{T} : \frac{e}{t}$ (21); wo man aus den Wirkungen, Zeiten und einer Ursache, die andere findet.

Ex.

Ex. 100 Personen = c; verzehren in 3 Wochen = t; 21 Centner Fleisch = e; wieviel Personen = C; verzehren in 5 Wochen = T; 63 Centner = E; $\frac{21}{3} : \frac{63}{5} = 100 : C$ also $C = 180$;

56. Anm. Eine andere Anwendung von (50) zeigt sich bey der Vergleichung verschiedener genannten Zahlen, als Münzen, Maasse, u. s. w. Z. E. Wenn 3 Mariengr. = 2 ggr. und 16 ggr. = 1 Gulden, und 3 Gulden = 2 Thaler, und 11 Thaler = 4 Ducaten, so fragt sich, wieviel Martengroschen auf den Ducaten gehen: Hie ist

2 : 3 = Margr : Gulgr. (33)
1 : 16 = Ggr : Gulden
2 : 3 = Guld : Thaler
4 : 11 = Thaler : Ducaten

2. 1. 2. 4; 3. 16. 3. 11 = Mgr. Duc. Diese Verhältniß ist = 1 : 9. 11 = 1 : 99. Dergleichen Exempel kommen bey Wechselrechnungen, bey Vergleichungen von Maassen, u. s. w. häufig vor. Man hat dieses Verfahren die Kettenregel genannt.

VI. Capitel.

Von der Zusammensetzung der Verhältnisse, den Reihen, und den Logarithmen.

1. Erkl. Wenn man zwo Verhältnisse wie a : b; b : e hat, sie mögen gleich oder ungleich seyn, so sagt man, die Verhältniß a : e sey aus diesen beyden zusammengesetzt (composita) oder es sey a : e = (a : b) + (b : e) bey welcher Bezeichnung man die Verhältnisse

Digitized by Google

von Quotienten unterscheiden muß, (V. 15.) denn es ist keinesweges $\frac{a}{e} = \frac{a}{b} + \frac{b}{e}$.

2. Anm. Dieser Ausdruck rechtfertiget sich dadurch: Wenn man a mit e vergleichen will, so kann man erstlich a mit b vergleichen, oder sehen, wievielmahl es in b enthalten ist, und alsdenn sehen, wievielmahl b in e enthalten ist, woraus sich denn giebt, wievielmahl a in e steckt, also wird die Verhältniß a : e aus den beyden a : b und b : e bestehen.

3 ist in 12 viermahl, und 12 in 60 fünfmahl, enthalten. Um also zu finden, wievielmahl 3 in 60 steckt, kann ich erstlich die Verhältniß 3 : 12; und denn die Verhältniß 12 : 60 untersuchen; das heißt 3 : 60 = (3 : 12) + (12 : 60).

3. Lehrs. Die Verhältniß zweyer Producte ist aus den Verhältnissen der Factoren zusammengesetzt; oder ac : bd = (a : b) + (c : d).

Bew. Man kann die Verhältniß c : d allesmahl in eine andere verwandeln, deren erstes Glied b ist; wenn man nähmlich sagt c : d = b : $\frac{bd}{c}$ (V. 35).

Nun nenne man $\frac{bd}{c} = e$; so ist c : d = b : e

also a : b = a : b

c : d = b : e folglich nach (V. 50. 21)

ac : bd = a : e

= (a : b) + (b : e) (1)

= (a : b) + (c : d) (3)

4. Zus.

4. Zuſ. Nach 1. 3. laſſen ſich auf dieſe Art mehr Verhältniſſe zuſammen ſetzen.

Es ſey a: b = a: b
c: d = b: q
e: f = q: r
g: h = r: f

So iſt aceg: bdfh = a: f = a: b † b: q † q: r † r: f
= a: b † c: d † e: f † g: h

Die Kettenregel (V. 56.) iſt eine ſolche Zuſammenſetzung der Verhältniſſe. Die zuſammengeſetzte Verhältniß nähmlich, iſt die, welche das Product aller vorhergehenden Glieder zum Producte aller folgenden hat.

5. Zuſ. fg: gh = f: h + g: g (1) = f: h (V. 21) alſo iſt die Verhältniß der Gleichheit g: g oder 1: 1 bey der Zuſammenſetzung der Verhältniſſe als o anzuſehen.

6. Zuſ. f: h + g: k + k: g = fgk: hkg (3) = f: h (V. 21.). Alſo müſſen die Verhältniſſe g: k und k: g in der Zuſammenſetzung einander aufheben, folglich einander entgegengeſetzt, eine in Abſicht auf die andere negativ ſeyn. Alſo iſt k: g = — (g: k) oder die verkehrte Verhältniß iſt die negative der ordentlichen; (ratio reciproca eſt directae negativa).

7. Zuſ. Wenn p: q = q: f ſo iſt p: f = p: q + p: q = 2. (p: q); oder zweymahl ſo groß, die verdoppelte, (duplicata, nicht dupla) von p: f; Es ſey p = 1 So iſt f = q^2 oder

die Verhältniß 1 : $\sqrt{q}$ der 1 zum Quadrate, noch einmahl so groß, als die 1 : q; der Einheit zur Wurzel. Man kann sich gleichsam gleiche Schritte vorstellen, die von 1 bis q, und von q bis q^2 geschehen, und also zwischen 1 und q^2 eine noch einmahl so grosse Entfernung geben als zwischen 1 und q.

8. Zus. $p : q = \frac{1}{2} (p : \sqrt{q})$ oder wenn $p = 1$; $1 : q = \frac{1}{2} (1 : q^2)$; das ist, die Verhältniß der 1 zur Wurzel ist halb so groß (subduplicata) als die, der 1 zum Quadrate.

9. Zus. Wenn $p : q = q : r = r : \sqrt{q}$ so ist $p : \sqrt{q} = 3. (p : q)$ und $p : q = \frac{1}{3} (p : \sqrt{q})$ wie vorhin, also wenn $p = 1$. die Verhältniß 1 zum Würfel, dreymahl so groß (triplicata) als die 1 zur Wurzel; und diese ein Drittheil von jener (subtriplicata).

10. Erkl. Wenn eine Menge Zahlen, in lauter zusammenhängenden geometrischen Verhältnissen fortgehen, so machen sie eine geometrische Reihe. Dergleichen ist 1; 2; 4; 8; 16; 32; 64; u. s. f. weil $1 : 2 = 2 : 4 = 4 : 8 = 8 : 16$ u. s. w.

11. Zus. Eine geometrische Reihe ist gegeben, wenn ihr erstes Glied und das zweyte, oder statt dessen der Exponent (V. 26) gegeben sind; denn alle folgende Glieder finden sich durch die Regel Detri (V. 36).

12. Zus. Wenn das erste Glied nicht 1 ist, so dividire man alle Glieder durch dasselbe; dies

ses

Digitized by Google

ses giebt eine Reihe, die in eben der vorigen Verhältniß fortgehet (V. 21) und 1 zum ersten Gliede hat.

7; 14; 28; 56; 112; 224; giebt
1; 2; 4; 8; 16; 32;

13. Anm. Dieses, und der vorzügliche Gebrauch, den wir im folgenden von solchen Reihen, deren erstes Glied 1 ist, machen werden, wird mich rechtfertigen, daß ich nur solche Reihen betrachte, die sich auch einfacher ausdrücken lassen.

14. Zus. Wenn das erste Glied einer geometrischen Reihe = 1, das zweyte a, ist, so enthält diese Reihe lauter Potenzen des zweyten Gliedes, (V. 36.)

M; 1; 2; 4; 8; 16; 32; 64; 128;
N; 1; a; a^2; a^3; a^4; a^5; a^6; a^7; .... a^m; a^{m+1}; ... a^n
L; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; ... m; m+1; ... n

Die Reihe M dient zum Exempel und enthält lauter Potenzen der 2; die Reihe N stellt die Sache allgemein vor; und L sind die zugehörigen Exponenten der Potenzen.

Daß lauter Potenzen kommen müssen, erhellt aus V. 35. 36. so: Wenn ein Glied der Reihe N; a^m heißt, und das ihm nächste x; so ist 1: a = a^m: x (10) also x = a^{m+1} (II. 7.) wenn also ein Glied eine Potenz ist, so ist das nächstfolgende eine, die einen Grad höher ist; aber das zweyte Glied ist eine Potenz, nähmlich die erste, also sind es die übrigen alle.

15. Zus. Von 1 bis a^m sind m Verhältnisse, jede so groß als 1: a; oder die Verhältniß

$1 : a^m$ besteht aus m solchen Verhältnissen; oder es ist $1 : a^m = m.\ (1 : a)$ und $\frac{1}{m}.\ (1 : a^m) = 1 : a$.

16. Zus. Jede Zahl der Reihe L, zeiget an, aus wieviel Verhältnissen die Verhältniß der 1 zu der über ihr stehenden Zahl in M zusammengesetzt ist.

17. Erkl. Wenn unter die geometrische Reihe N; die Reihe der natürlichen Zahlen so untergeschrieben wird, wie L so heisst jede Zahl in L der Logarithme der über ihr stehenden in N.

18. Zus. Was für eine Zahl über jeder von L in N stehen soll, ist bestimmt sobald a bestimmt ist, (11) daher kann man sagen, daß die Zahl in L, als Logarithme zu einer gewissen Zahl in N gehöre; ob gleich eigentlich die Zahl in L, die Summe oder Menge der Verhältnisse (αριθμος λογων) ist, die von 1 bis auf die über ihr stehende Zahl in N gehen (16).

19. Zus. Wenn man a ändert, so werden bey eben den L, ganz andere N stehen. Was also zu den Logarithmen für Zahlen gehören, bestimmt sich durch die Zahl deren Logarithme $= 1$ ist; und eine solche Bestimmung, da durch die Reihe L mit einer bestimmten geometrischen N verbunden wird, heisst ein Logarithmisches System.

20.

Digitized by Google

20. Lehrs. Wenn zwo Zahlen der Reihe N mit einander multiplicirt oder dividirt werden, so ist der Logarithme des Products, die Summe der Logarithmen der Factoren; und der Logarithme des Quotienten, das, was herauskömmt, wenn von dem Logarithmen des Dividendus, der Logarithme des Divisors abgezogen wird.

Bew. I. $a^m a^n = a^{m+n}$ (II. 7.) aber die Logarithmen der Factoren sind m, n, und des Products m + n (14).

II. $a^{m+n} : a^n = a^m$ (II. 10.); und m + n, n, m, sind wieder die Logarithmen des Dividendus, des Divisors, des Quotienten.

21. Zus. Der Logarithme einer Potenz kömmt heraus, wenn man den Logarithmen der Wurzel mit der Zahl, die den Grad der Potenz anzeigt, multiplicirt. Denn man sollte ihn so vielmahl, als diese Zahl anzeigt, zu sich selbst addiren. $\log (a^2)^3 = 3 . \log a^2 = 3 . 2 = 6 = \log a^6$ und $(a^2)^3 = a^6$.

22. Zus. Will man aber aus einer Zahl in N die Wurzel eines gewissen Grades ziehen, so muß man der Zahl Logarithmen, durch den Exponenten des Grades, von dem die Wurzel seyn soll, dividiren, der Quotient ist der gesuchten Wurzel Logarithme. Denn dieser Quotient wird einer Zahl ihr Logarithme seyn, die auf den angezeigten Grad erhoben, die gegebene Zahl zur

Potenz hat (21) $\log \sqrt[3]{a^6} = \frac{1}{3} \cdot \log a^6 = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2 = \log a^2$; und $a^2 = \sqrt[3]{a^6}$.

23. Anm. Die Logarithmen zeigen nähmlich an, ob die Verhältnisse vervielfacht oder dividirt werden (7. 8. 9.).

24. Zus. Wenn man die Reihen M, N, L

$\frac{1}{64}$; $\frac{1}{32}$; $\frac{1}{16}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$; 1 M

$\frac{1}{a^6}$; $\frac{1}{a^5}$; $\frac{1}{a^4}$; $\frac{1}{a^3}$; $\frac{1}{a^2}$; $\frac{1}{a}$; 1 N

—6—5—4—3—2—1 0 L

rückwärts fortsetzet, so werden die Exponenten von a; negativ (II. 12.) oder die Zahlen L deuten Glieder auf der entgegengesetzten Seite von 1 an; auch sind die Verhältnisse $1 : \frac{1}{a}$ und $1 : a$; oder $1 : \frac{1}{a^2}$ und $1 : a^2$ u. s. w. einander entgegengesetzt, (5) daß also die Summen der Verhältnisse in gegenwärtigem Absatze, negativ sind, wenn die im (15) positiv angenommen werden.

25. Zus. Wenn $1 < a$; so enthält das Stück der Reihe N in 15 Zahlen die mehr als 1 sind, und das Stück in 24, eigentliche Brüche. Also sind die Logarithmen der eigentlichen Brüche verneinend, wenn die Logarithmen ganzer Zahlen und uneigentlicher Brüche bejahend sind. Die Regel der Division (20. II.) giebt in gehörigen Fällen solche verneinende Logarithmen.

26. Zus. Wenn man zwischen zweyen nächst aufeinander folgenden Gliedern der Reihe N eine mittlere Proportionalzahl (V. 32.) sucht, so halbirt man dadurch die Verhältniß zwischen diesen beyden Gliedern; (8) Wenn also a^m das eine, und a^{m+1} das andere ist, die mittlere Proportionalzahl aber $= p$; so sind von 1 bis a^m m Verhältnisse jede $= 1 : a$ und von a^m bis p ist eine halbe solche, also sind von 1 bis p; $m + \frac{1}{2} = \frac{2m+1}{2}$ Verhältnisse; der Logarithme also von p muß $\frac{2m+1}{2}$ seyn (17) oder er ist die mittlere arithmetische Proportionalzahl (V. 12.) zwischen den Logarithmen der beyden Zahlen, zwischen denen p die mittlere geometrische ist.

27. Zus. Er ist zugleich, wie nach (17) seyn soll, der Exponent der Potenz, auf welche a muß erhoben werden, damit p herauskömmt. Denn $p = \sqrt{(a^m . a^{m+1})}$ (V. 32.) $= \sqrt{a^{2m+1}}$ (II. 7.) $= a^{(2m+1) : 2}$ (II. 9.). Man wird hieraus verstehen, was die Exponenten, die keine ganze Zahlen sind, bedeuten, und wo sie herkommen, nähmlich von Gliedern einer geometrischen Reihe, die man zwischen andere einschiebt, und dadurch die Verhältniß, die man anfangs für

für die Einheit unter den Verhältnissen angenommen hatte, weiter eintheilet.

28. Zus. Wenn man auf eben die Art zwischen p und a^{m+1} die mittlere Proportionalzahl q suchte, so wäre ihr Logarithme und Exponent $= \left(\frac{2m+1}{2} + m + 1\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{4m+3}{4}$ $= m + \frac{3}{4}$. Man theile nun nähmlich die Verhältniß zwischen den beyden nächsten Gliedern der Reihe N, in vier Theile ein, daß also allerdings von 1 bis q, $m + \frac{3}{4}$ Verhältnisse wären. Suchte man aber zwischen a^m und p die mittlere Proportionalzahl k, so wäre ihr Logarithme und Exponente $\left(\frac{2m+1}{2} + m\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{4m+1}{4}$ $= m + \frac{1}{4}$ nähmlich von 1 bis k wären $m + \frac{1}{4}$ Verhältnisse.

29. Zus. Man kann diese Arbeiten weiter treiben, und zwischen q und dem folgenden Gliede der Reihe N, oder k und dem vorhergehenden, mittlere Proportionalzahlen und ihre Logarithmen suchen. Auf diese Art ist klar, daß man jeder Zahl f die zwischen die genannten beyden Glieder der Reihe N fällt, ihren Logarithmen haben kann, wenigstens der Wahrheit so nahe als man zu irgend einem Gebrauche verlangt. Denn nachdem man p gesucht hat, so wird f entweder hinter oder vor p liegen; In jenem Falle sucht man q, in diesem k, und nun liegt

im

im ersten Falle f entweder hinter q, da man zwischen q und a^{m+1} eine neue Proportionalzahl suchet, oder zwischen q und p, da solches mit diesen beyden Zahlen geschieht. Im zweyten Falle liegt f entweder vor k, oder zwischen k und p; und man verfährt eben so. So bekömmt man also immer Zahlen, die näher beysammen liegen zwischen die f fallen muß, und schlesst also f zwischen Gränzen ein, die man ohne Ende fort immer mehr und mehr verengern kann; Man kömmt also ohnfehlbar auf eine Zahl, die so wenig von f unterschieden ist, als man nur bey irgend einem Gebrauche verlangen kann, und findet zugleich dieser Zahl Logarithmen, den man für den Logarithmen von f annehmen kann. Da nun jede gegebene Zahl zwischen ein Paar Glieder der Reihe N fallen muß, so lassen sich solchergestalt die Logarithmen aller Zahlen finden. Man braucht nur die Logarithmen der ganzen Zahlen so zu suchen, denn der Brüche ihre findet man aus (20).

30. Anm. Die Logarithmen, deren man sich bedienet, sind wirklich auf diese ungemein mühsame Art berechnet worden. Leichtere Betechnungen und andere Lehren von den Logarithmen, die in der höhern Mathematik von unendlichem Nutzen sind, lassen sich hier nicht vortragen.

31. Zus. Die Reihe N sey folgende

K 1; 10; 100; 1000; 10000; .....

L 0; 1; 2; 3; 4; .....

und

und man habe für alle ganze Zahlen K die zugehörigen Logarithmen gefunden (30), so sind die Logarithmen aller zwischen 1 und 10 fallenden Zahlen, eigentliche Brüche. Nun drückt man die Logarithmen durch Decimalzifern aus. Also fangen sich diese alle mit einer 0 an, welche die Stelle der Einer ausfüllt. Der zwischen 10 und 100 fallenden Zahlen ihre Logarithmen, müssen also mehr als 1 und geringer als 2 seyn, d. i. zur höchsten Zifer, in der Stelle der Einer; eine 1 haben. So fangen sich die Logarithmen der Zahlen zwischen 100 und 1000 mit einer 2; derer zwischen 1000 und 10000 mit einer 3 an, u. s. f. Jeder Logarithme nehmlich besteht aus einer ganzen Zahl, und einer Reihe zehntheilicher Brüche; die ganze Zahl, die ich seinen Anfang genannt habe, ist allezeit um eins weniger als die Menge der Zifern, mit welchen die Zahl geschrieben wird, zu der der Logarithme gehört: Weil man also die Menge dieser Zifern, d. i. die beyden Potenzen von 10 zwischen welche die Zahl, zu der der Logarithme gehört, fallen muß, aus diesem Anfange erkennt, hat man ihn, da er meistens nur eine Zifer hat, die Kennzifer (figura characteristica) genannt, das übrige des Logarithmen (mantissa) giebt die ihm zugehörige Zahl völlig. Dieses übrige befindet sich in den Tafeln nicht ganz, sondern nur die ersten Zifern davon, soviel zum Gebrauche zulänglich sind. Alle Logarithmen, die von 1, 10, 100, 1000,

1000, 10000, ausgenommen, sind also nicht völlig genau in den Tafeln enthalten. In den gemeinen Tafeln sind die ersten 7 Decimalzifern von jedem vorhanden. Die letzte von ihnen hat man um 1 vermehrt, wenn die erste der weggelassenen über 5 war.

32. Zus. Wenn der Logarithme L zur Zahl N gehört; so gehört L + 1 zu 10 N; L + 2 zu 100 N u. s. w. Es versteht sich, daß die Addition zur Kennzifer des Logarithmen geschieht.

33. Zus. Wenn man die Zahl N zu welcher der Logarithme gehört, nicht genau in den Tafeln findet, wenn sie nähmlich keine ganze Zahl ist, dergleichen allein die Tafeln enthalten; so setze man N falle zwischen P und P + 1; welches man daraus sieht, wenn der Logarithme von N zwischen die Logarithmen von P und von P + 1 fällt. Nun suche man die Logarithmen von 10 P und 10. (P + 1) auf, welches eben die porigen, nur um 1 vermehrt (32) seyn werden; zwischen diese fällt also auch log N um 1 vermehrt; das heisst der Logarithme einer Zahl die 10 N wäre. Aber die Grösse, welche durch N bestimmt wird, lässt sich ungeändert durch 10 N ausdrucken, wenn man statt der ganzen 1, nur 0,1 zur Einheit nimmt, also findet man solchergestalt diese Grösse in Zehntheilen der angenommenen Einheit, oder zwo in Zehntheilen ausgedruckte Grössen, zwischen welche sie fällt. Und eben so findet man sie in Hunderttheilchen, Tausend-

Digitized by Google

sendtheilchen, u. s. w. wenn man die Kennzifer des log N um 2; 3; u. s. f. vermehrt. Doch schränken die berechneten Tafeln diesen Vortheil ein, da die gemeinsten nur die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 10000 enthalten; und die grössten nur bis auf 102100 gehen.

Exempel. Die Gewichte zweener gleich grosser Klumpen von Eisen und von Bley verhalten sich (Boerhaav. Chym. T. I. p. 39. ed. Lipsi.) = 7852 : 11345; Nun hat man eine eiserne Kugel, die gleich 1 Pfund wiegt. Die Frage ist, wieviel Pfund eine bleyerne von gleicher Grösse wiegen würde, diese gesuchte Zahl sey = N so ist

$$7852 : 11345 = 1 : N \text{ oder}$$

$$N = \frac{11345}{7852} \text{ folglich}$$

$$lN = l\,11345 - l\,7852 \quad (20)$$

wollte man sich nun hie der gemeinen Tafeln bedienen, so fände man in ihnen l 11345 nicht unmittelbar; Man kann ihn aber doch vermittelst ihrer erhalten, wenn diese Zahl sich in Factoren zerfällen lässt (20). Nun ist sie = 2269. 5; also sage man

$$l\,2269 = 3,3558345$$
$$l\,5 = 0,6989700$$
$$l\,2269.5 = 4,0548045 = l\,11345$$
$$l\,7852 = 3,8949803$$
$$0,1598242 = lN$$

Die-

Dieser Logarithme, wie er da stehet, aufgesucht, fällt zwischen l 1 und l 2 und zeigt also, daß N zwischen 1 und 2 falle. Man vermehre ihn um 1; oder man suche den Logarithmen 1,1598242 auf; dieser fällt zwischen l 14 und l 15; und zeigt also, daß N zwischen 1,4 und 1,5 fällt. Nochmahls mit 1 vermehrt, fällt der Logarithme 2,1598242 zwischen l 144 und l 145, oder N zwischen 1,44 und 1,45. Endlich der Logarithme 3,1598242 zwischen 1444 und 1445 oder N zwischen 1,445 und 1,446. Man hat also viel leichter als durch die gewöhnliche Division geschähe, herausgebracht, daß die bleyerne Kugel zwischen 1,444 und 1,445 Pfund wiegen muß.

Nähme man der bleyernen Gewichte = 1 Pf. und wollte der eisernen ihres = M wissen, so spräche man

$$11345 : 7852 = 1 : M$$

$$IM = l7852 - l11345 = -0,1598242$$

$$+4,$$

$$Q = +3,8401757$$

Nähmlich M ist ein Bruch (25). Die Zahl, welcher dieser Logarithme bejahend, wie man ihn vorhin fand, zugehört, kann $\frac{1445}{1000}$ angenommen werden. Der negative Logarithme nun ist = 0 — dem positiven, d. i. (weil l 1 = 0) so viel als der Logarithme des Quotienten den 1 mit $\frac{1445}{1000}$ dividirt giebt (20) oder = $\frac{1000}{1445} = \frac{200}{289}$ also wöge die eiserne Kugel $\frac{200}{289}$ Pfund.

Die

Digitized by Google

Die niedrigste Ziser in Q ist 7, nicht 8, denn log M hätte eigentlich noch unzähliche Zifern nach den hie stehenden. Wenn man sich nun eben so die unzähliche Nullen nach der 4 vorstellt, so erhellt daß bey dem Abzuge den die Rechnung erfodert, die 0 die in der Ordnung — 7 stand, schon in eine 9 ist verwandelt worden.

Ob diese letzte Ziser von Q; 7 oder 8 ist, das ist freylich eine Kleinigkeit auf welche hie gar nichts ankömmt. Indessen dient diese Erinnerung zu sehn wie die Rechnung vollkommen regelmässig zu führen ist, und es kann Fälle geben, wo die Betrachtung der letzten Ziser wichtiger ist als hie.

Will man das Gewicht der eisernen Kugel in 10000 Theilen eines Pfundes haben; so setze man, statt der 1 welche der bleyernen Kugel Gewicht bedeutete, sey 10000 gesetzt worden; so wäre die Proportion

$$11345 : 7852 = 10000 : M \text{ und}$$

$$M = \frac{10000 \cdot 7852}{11345} \text{ oder}$$

$$1M = l\,10000 + l\,7852 - l\,11345;$$ da nun $l\,10000 = 4$; so findet sich dieses auch, wenn man das verneinende das $l\,7852 - l\,11345$ giebt, gehöriger massen zu 4 rechnet, wie oben zu sehen ist. Die Zahl, welche dem Logarithmen Q zugehört, ist 6921, aso wiegt die eiserne Kugel 0,6921 Pfund.

Wenn

Digitized by Google

Wenn man einen eigentlichen Bruch, dessen Logarithmen man finden kann, sogleich in Decimalbrüchen zu wissen verlangt, ohne sich um den gewöhnlichen Ausdruck dieses Bruchs durch seinen Zähler und Nenner zu bekümmern, so wird man folgendes Verfahren bequem finden, das nur anfangs damit man sich daran gewöhnt einige Aufmerksamkeit erfodert.

Man soll also von einem kleinern Logarithmen einen grössern abziehn.

Man addire zum kleinern so viel als nöthig ist, damit sich der grössere wirklich von demjenigen abziehen lässt, was der kleinere und das Addirte zusammen geben.

Der bejahte Rest, welcher so herauskömmt, ist zu groß, und zwar um dasjenige was man addirt hatte.

Man schreibe also das was man addirt hatte, mit dem Zeichen — hinter den bejahten Rest.

So hat man nun den Logarithmen des Bruchs.

Dieser Logarithme besteht aus zwey Stücken, einem bejahten, und einem verneinten.

Man suche was für einer Zahl das bejahte Stück zugehört.

Diese Zahl wird mit 10; 100; 1000; u. s. w. dividirt, nachdem das verneinte Stück, — 1; — 2; — 3; u. s. w. ist.

Im Exempel sollte man l 11345 abziehn. Es erhellt daß dieser Logarithme sich von 1 +

Digitized by Google

l 7852 abziehen lässt. Man verrichte also den Abzug, so ist der Rest $-1 = \log\left(\frac{7852}{11445}\right)$.

Die Rechnung sieht so aus

$$1 + \log 7852 = 4,8949803$$
$$\text{abgezogen} \quad l\ 11345 = 4,0548045$$
$$\log \frac{7852}{11345} = 0,8401757 - 1$$

Der bejahte Theil unter der Kennzifer 3 aufgesucht, gehörte zu 6921 wenn er wirklich diese Kennzifer hätte. Weil nun seine Kennzifer o ist, so gehört der bejahte Theil zu 6,921; Und das muß mit 10 dividirt werden, weil der verneinte Theil; — 1 ist. Also ist $\frac{7852}{11345} = 0,6921$

Man sieht leicht daß dieß nur eine Abkürzung des nächst zuvor gelehrten Verfahrens ist.

Zweytes Exempel.

Man soll $\sqrt[4]{\frac{7364^3}{5499^2}}$ finden. Ich will diese Wurzel = R und die Zahl, aus der sie soll gezogen werden, P heissen.

$$l\ 7364 = 3,8671138$$
$$\text{multipl. mit} \quad 3$$
$$11,6013414$$
$$\text{Eben so } 2\,l\ 5499 = 7,4805674$$
$$lP = 4,1207740$$
$$\text{divid. mit } 4 = lR = 1,0301935$$

lR

IR unter der Kennzifer 3 aufgesucht, giebt R = 10, 72:

Eine Probe hievon kann mit den Buchnerischen Quadrattafeln ohne grosse Mühe so angestellt werden: von 10, 72 oder R findet man vermittelst ihrer, das Quadrat = 114, 9184 dafür man 114, 92 annehmen kann; Und hievon ist das Quadrat 13206, 6064 = R^4 = P In grössern logarithmischen Tafeln nun fällt IP zwischen die Logarithmen von 13206 und von 13207.

Drittes Exempel.

Man verlangt die Potenz der 2 welche 8192 giebt Oder es sey $2^x = 8192$ so ist $x \, l\, 2 = l\, 8192$ (21)

also $x = \frac{l\, 8192}{l\, 2} = \frac{3,9133899}{0,3010300} = 12,99.$

Dieser Quotient ist beynahe 13, und es ist auch eigentlich x = 13 wie die Fortsetzung der Reihe M (14) leicht zeiget. Daß aber nicht 13 selbst zum Quotienten herauskömmt, rührt daher, weil man nur mit Stücken der Logarithmen rechnet (31). In solchen Aufgaben, wo der Werth der Potenz einer gegebenen Zahl gegeben ist, der Exponent aber gesucht wird, sind die Logarithmen unentbehrlich, das gesuchte sogleich (directe) zu finden, denn der Weg, die Potenzen der gegebenen Zahl nach der Reihe zu machen, würde oft zu unüberwindlichen Rechnungen führen, wenn zumahl die gegebene Wurzel, und x, grosse Zahlen wären.

Digitized by Google

34. Anm. Die Logarithmen sind von Joh. Neper Bar. v. Merchiston, einem Schottländer, im Anfange des vorigen Jahrhunderts, vornehmlich zu trigonometrischem Gebrauche erfunden worden. S. seine Mirifici canonis logarithmorum descriptio. Edinb. 1614. Benjamin Ursin ist unter den ersten gewesen, der sie den Deutschen bekannt gemacht. S. sein Cursus Mathemat. practici Vol. I. 1618. Henrich Brigg aber hat sie auf eine bequemere Art eingerichtet, so wie sie jetzo gebraucht werden. Die Trigonometrie giebt hievon weitern Unterricht. Von grössern und sonst merkwürdigen logarithmischen Tafeln, meine Astron. Abh. II. Samml. 4. Abh. Fortsetzung der Rechenkunst VIII. Cap.

Die

Digitized by Google

Die Geometrie.

Erklärungen.

1. Die Gränze einer Sache heisst ihr äuserstes, oder wo sie aufhört.

2. Eine stetige Grösse (continuum) heisst, deren Theile alle so zusammenhängen, daß, wo einer aufhört, gleich der andere anfängt, und zwischen des einen Ende und des andern Anfange nichts ist, das nicht zu dieser Grösse gehörte.

3. Die geometrische Ausdehnung ist ein Raum, den eine stetige Grösse ausfüllt.

Anm. Es ist nicht nöthig, sich hie in metaphysische Untersuchungen des Raumes und der Stetigkeit einzulassen. Der Begriff der geometrischen Ausdehnung ist ein abstracter Begriff, welcher richtig bleibt, wie man auch sonst diese Dinge sich vorstellen will. Man muß eine stetige Ausfüllung des Raumes annehmen, sobald man auf die besondere Beschaffenheit der Dinge, welche den Raum ausfüllen, nicht sehen will. Aber gegentheils ist niemand berechtiget, die metaphysischen Begriffe nach den geometrischen zu richten, oder die Theilbarkeit ohne Ende, der physischen Ausdehnung beyzulegen, weil sie der geometrischen zukömmt. Bey dieser findet sie statt, weil ihr allgemeiner Begriff der Theilung keine Gränzen setzt. Wo jeder Theil durch nichts als die Grösse und den Ort, von andern unterschieden ist, da kann man aus jedem Theile, Dinge die nicht völlig eben den Ort einnehmen, eben die Grösse haben, neue Theile,

Digitized by Google

machen. In der Natur aber finden wir, daß sich die Theile von einander durch mehr Dinge als durch Grösse und Ort unterscheiden, und also könnte hie etwas die Theilung ohne Ende hindern, die in der Geometrie verstattet ist. Die natürliche Logik, und selbst Beyspiele der Geometrie zeigen, daß Bestimmungen bey einem allgemeinen Begriffe statt finden, die ein besonderer nicht zulässt.

4. Die körperliche Ausdehnung, ein geometrischer Körper (solidum; corpus) heisst eine solche Ausdehnung, die das, was sich innerhalb ihrer Gränzen befindet, überall, nach allen Seiten zu umgiebt. Die Ausdehnung der Körper an ihren Gränzen heisst eine Fläche (superficies;) und die Ausdehnung der Fläche an ihren Gränzen, eine Linie (linea).

Anm. Ein Fisch, der im Innern eines Flusses schwimmt, ist überall mit Wasser umgeben; und kann sich nirgends hin bewegen, ohne Wasser aus der Stelle, wo er hin will, zu treiben. Dieß erläutert den Begriff der körperlichen Ausdehnung. Schwimmt er auf des Flusses Oberfläche, so kann er sich über dieselbe erheben, ohne daß ihm da Wasser im Wege wäre.

Die Wörter Länge, Breite, Dicke, sind dem Sprachgebrauche nach nicht Nahmen verschiedener Ausdehnungen, sondern einer einzigen, der Länge, die nach verschiedenen Richtungen an dem Körper betrachtet wird. Uebrigens enthält die Ausdehnung der Fläche nichts von der körperlichen; welche bey ihr aufhört. Also können übereinander gehäufte Flächen keinen Körper ausmachen, weil vielmahl Nichts, nie Etwas ausmacht. Eben so kann keine Fläche aus aneinander gelegten Linien bestehen.

5. Der

Digitized by Google

5. Der Punct ist die Gränze der Linie; und also aller Ausdehnung.

Folglich hat er weder Ausdehnung noch Theile, und eine Menge von aneinandergesetzten Puncten macht keine Linie aus.

Aber die Linie kann aufhören, wo man will; folglich überall in ihrer ganzen Ausdehnung Puncte haben. Und da wir hie durchgängig nur mit Möglichkeiten beschäftiget sind, so ist es gleichviel, ob man sagt: die Linie kann überall Puncte haben; oder: sie hat dergleichen überall. Also darf man überall in der Linie Puncte annehmen. Es ist aber einerley, ob man in der Linie überall Puncte annimmt; oder ob man sich einen einzigen Punct, der nach und nach in verschiedene Stellen der Linie gekommen wäre, vorstellt, denn ein Punct ist von dem andern in nichts unterschieden. Daher sagt man: Eine Linie entstehe aus der Bewegung eines Punctes. Das heisst aber nicht: Sie bestehe aus aneinander liegenden Puncten, denn man kann sich keine Bewegung vorstellen, ohne den Ort, den der Punct jetzo einnimmt, und den Ort, den er im nächsten Augenblicke einnimmt, in einiger Entfernung von einander zu setzen. Diese Entfernung ist schon eine Linie, und die grosse Linie bestehet aus solchen Entfernungen, aus kleinern Linien, nicht aus Puncten.

Meine Gedanken vom Ursprung einer Linie aus Bewegung eines Punctes Hamburg. Magaz. 4 B.

Digitized by Google

(Leipz. 1749.) 46 S. Meine Bemerkung, daß der Scholastiker Occam, Punct, Linie, und Fläche, sehr richtig erklärt hat. Leipzig. Magaz. 1782, 224 S.

Anm. Die letzterwähnte Erklärung der Linie bringet natürlich auf die Art, wie sinnliche Bilder von Linien gemacht werden. Man führet die Spitze eines Bleystiftes auf einem Papiere fort: Man sieht diese Spitze als einen Punct an, das heisst, man zieht ihre Grösse in keine Betrachtung. Aber sie lässt Theilchen auf dem Papiere sitzen. Diese Theilchen stellen die Spuren vor, welche ein Punct nach sich lassen würde, der sich eben so bewegte; Sie geben also ein sinnliches Bild der Linie. In der That ist dieser Strich eine Reihe Wasserbleyklümpchen, kleiner Körperchen; aber man sieht nicht darauf, wieviel sie sich über das Papier erheben; was für einen breiten Streifen sie auf seiner Fläche bedecken: Man sieht blos, nach was für einer Gegend, nach was für verschiedenen Gegenden sie auf dem Papiere liegen; d. i. man betrachtet an dieser Reihe blos die Ausdehnung der Linie. So stellt ein solcher Strich den Sinnen selbst das Bild einer Linie desto ähnlicher dar, je zärter er ist, je weniger seine Fläche, seine körperliche Ausdehnung in die Sinne fällt, ob sich wohl kein Strich machen oder empfinden lässt, der nur die Ausdehnung einer Linie hätte. In der Ausübung hat man Ursache das Bild der mathematischen Linie so vollkommen als möglich zu machen; d. i. seiner Aehnlichkeit mit dem Originale so nahe zu kommen als sich thun lässt. Oft können die übrigen Ausdehnungen eines solchen Bildes sehr sinnlich seyn, und doch zu einer gewissen Absicht in keine Betrachtung kommen, als wenn man auf dem Felde eine Linie mit einer Schnur anzeigt: Und allemahl kann man Linien finden, wo man die übrigen Ausdehnungen mit Fleiß aus den Augen setzt. Böhmen ist in eine Rundung von Bergen eingeschlossen.

6. Ei-

Digitized by Google

6. Eine gerade Linie ist, deren Puncte alle nach einer Gegend zu liegen; AB (1 F.) Eine krumme ABCDEF (2 F.) in der, zwischen jedem Paare Puncten f, c, so nahe man solche auch annimmt, welche liegen, die sich mit den angenommenen nicht in einer geraden Linie befinden.

Anm. Die gerade Linie wird niemand aus irgend einer Erklärung kennen lernen, und niemand hat es auch nöthig. Aber man kann wohl etwas von ihr sagen, das die Aufmerksamkeit leitet, auf das, was sie zu einer geraden Linie macht, genauer Acht zu geben. Wenn man in A einen Punct, einen Körper, auf dessen Grösse man nicht sieht, setzet: so kann sich derselbe von seinem Orte nach unzähligen Gegenden bewegen. Sagt man, er soll nach B zu gehen, so ist die Gegend bestimmt, nach der er gehen soll, und er könnte nach eben der Gegend noch über B hinaus nach F gehen. Ginge er von A nach C, so ginge er nach der Gegend, die der ersten entgegengesetzt ist, und sein Weg AC wäre in Absicht auf AB verneinend (Arithm. I. 90.).

Bey der krummen Linie aber, geht der Punct, der sich von A aus bewegt, nicht gleich nach der Gegend zu, nach welcher B in Absicht auf A liegt, sondern nimmt verschiedene ganz andere Wege, deren keiner ihn nach B führen würde, wenn er auf demselben verbliebe. Also wird eine krumme Linie von einem Puncte beschrieben, der sich beständig von der Gegend, nach der er jetzo gehet, in dem nächstfolgenden Augenblicke ablenket, oder seinen Weg beständig ändert.

Die Geometern nehmen hiebey ferner an, daß diese Aenderung nach dem Gesetze der Stetigkeit geschehe. Der Punct hat die Richtung seines Weges von A bis B merklich verändert: Ehe diese Veränderung

Digitized by Google

so groß werden konnte als sie in B ist, mussten alle dazwischen fallende kleinere Veränderungen vorkommen. Der Punct, der eine krumme Linie beschreibet, ändert seine Wege nie plötzlich, wie in der 3. F. aus GH in HI, aus HI in IK, sondern unmerklich, daß sich nicht angeben lässt, um wieviel er jeden Augenblick von dem Wege des vorigen Augenblicks abgewichen ist. So wird er in der 2 F. von CE nicht unmittelbar in EF gehen, sondern den Knoten EdDeE beschreiben, der ihn durch unmerkliche Aenderungen des Weges in E in die Richtung bringt, aus der er sich da weiter ablenket in EF fortzugehen. Also unterscheidet sich die krumme Linie 2 F. von der Zusammenfügung gerader Linien 3 F. in zwey Stükken: 1) daß sich dorten kein gerader Theil bestimmen lässt, wie hier GH, HI, IK; 2) daß man dorten nicht bestimmen kann, wie weit die Richtung des beschreibenden Punctes in jedem Augenblicke, von der Richtung im nächstvorhergehenden unterschieden ist.

Weil alle Theile einer geraden Linie AB, BF, (1. F.) nach einerley Gegend zu liegen, so findet man in keinem Theile etwas, das nicht auch in dem Ganzen zu finden wäre; denn das Ganze streckt sich nach eben der Gegend. Nur die Grösse unterscheidet den Theil vom Ganzen; und man kann also sagen, bey der geraden Linie sey jeder Theil dem Ganzen ähnlich. Der Freyh. v. Wolf hat dieses für eine Erklärung der geraden Linie angegeben, und die Aehnlichkeit in eben dem Umstande gesucht, den ich angezeigt habe (El. Geom. Lat. §. 19.). Ich finde nicht, daß ihn dieses in den Stand gesetzt, von der geraden Linie etwas neuers oder gründlichers, als man vor ihm wusste, zu sagen. Uebrigens sind solchergestalt alle gerade Linien einander ähnlich, weil jede ein Theil der grössern werden kann; und alle Theile der krummen Linie sind dem Ganzen unähnlich.

7. Ei-

Digitized by Google

7. Eine ebene Fläche oder Ebene (planum) heisst, in der man von jedem Puncte zum andern gerade Linien ziehen kann, so daß alle Puncte dieser Linien in der Fläche liegen. 4 F. Ein krumme Fläche diejenige, auf der man keinen Theil, der eben wäre, angeben kann.

Anm. Auf der krummen Fläche lassen sich von jedem Puncte zum andern krumme Linien ziehen. Es kann aber auch auf mancher krummen Fläche Puncte geben, durch die sich eine gerade Linie auf ihr ziehen lässt. Betrachtungen, die hier und Anfängern zu erklären zu weitläuftig, und zu schwer seyn würde, hindern mich, dieses als die Erklärung anzugeben. Wenn zwo Ebenen gegen einander geneigt wären, so könnte man durch jeden Punct der einen, nach dem Durchschnitte der Ebenen eine krumme Linie und von dar wieder eine nach jedem Puncte der andern ziehen; und doch machten diese beyden Ebenen keine krumme Fläche. Es ist wahr, diese beyden krummen Linien machten zusammen nicht eine einzige aus. Denn jede krumme Linie, muß entweder in einer einzigen Ebene bleiben, oder sich nach dem Gesetze der Stetigkeit (6. Erkl.) alle Augenblicke aus einer Ebene in eine andere wenden, wenn sie auf einer krummen Fläche gehet, und eine doppelte Krümmung hat; (courbe à double courbure). Aber durfte ich dieses hie wohl als bekannt zum voraus setzen?

8. Ein ebener Winkel 6. F. ist die Neigung zwoer Linien gegen einander, die in einer Ebene liegen, und nicht eine einzige gerade ausmachen. Ihr Durchschnitt A heisst sein Scheitel, die Linien AB, BC, sind seine Schenkel. Daher pflegt man ihn durch die Buchstaben BAC zu nennen, wenn man ihn von andern an

eben

Digitized by Google

eben der Spitze, unterscheiden will. Sonst ist es genug die Spitze A zu nennen, oder auch ihn durch einen kleinen hineingeschriebenen Buchstaben x, anzudeuten.

9. Gleichlaufende oder parallele Linien, AB, CD, 7. F. sind gerade Linien in einer Ebene, die nie zusammen stossen, so weit man sie auch auf beyden Seiten verlängert. Zusammengehende (convergentes) heissen, die verlängert einander schneiden, wie 8. F. BA, DC; wenn diese Linien nach den entgegengesetzten Richtungen AB, CD, betrachtet werden; heissen sie aus einander fahrend (divergentes).

10. Nebenwinkel 9. F. (contigui, deinceps positi,) sind ABD, ABC, die einen Schenkel AB gemein, und die beyden übrigen Schenkel BD, BC, in einer geraden Linie DBC nach entgegengesetzten Seiten des gemeinschaftlichen Scheitels B haben.

11. Wenn eine gerade Linie AB 10. F. auf der andern CD so stehet, daß die Nebenwinkel ABD, ABC gleich werden, so heisst sie auf CD senkrecht oder lothrecht (perpendicularis, normalis;) und die Winkel ABD, ABC, heissen rechte (recti). Ein Winkel, der gröſſer als ein rechter ist, EBD heisst stumpf, ein kleinerer EBC spitzig.

12. Eine mit Linien begränzte Fläche heisst eine Figur. In der Folge ist die Rede nur von ebenen Figuren, die ganz in einer Ebene sind.

13.

Digitized by Google

13. Ein Kreis (circulus) entstehet, wenn sich die Linie CA 11. F. um den vesten Punct C in einer Ebene herumdrehet, bis sie wieder in die vorige Lage kömmt. Des Punctes A Weg ADBFGH heisst des Kreises Umfang (peripheria) der Raum, über den CA weggestrichen ist, seine Fläche, C der Mittelpunct (centrum). Jede Linie durch den Mittelpunct, so viel von ihr zwischen dem Umfange enthalten ist, BCA, der Durchmesser. Einer solchen Linie Hälfte CA = CB der Halbmesser (semidiameter s. radius) Linien, die von dem Umkreise begränzt werden, ohne durch den Mittelpunct zu gehen FG, GH, FH, Sehnen (Chordae); das Stück der Kreisfläche zwischen einer Sehne FH und den Bogen FGH ein Abschnitt (segmentum) und wenn sich die Sehne in den Durchmesser BCA verwandelt, ein halber Kreis; die Fläche, die zwischen zween Halbmessern DC, CE, und ihren Bogen DE enthalten ist, ein Ausschnitt (sector).

Der Winkel des Abschnittes heisst, den die Sehne FH mit dem Bogen FG macht; der Winkel im Abschnitte FGH der seinen Scheitel irgendwo in des Abschnittes Bogen hat, und mit den Schenkeln durch den Sehne Enden streicht; ihn enthält der genannte Abschnitt, er stehet aber auf dem übrigen Bogen FDEH. Aehnliche Abschnitte enthalten gleiche Winkel.

Wenn

Digitized by Google

Wenn eine Linie wie TA an den Kreis so antrifft, daß sie ihn, verlängert nicht schneidet, oder nichts von seinem Umfange wegnimmt, heisst sie eine Tangente.

Alle Halbmesser sind gleich, nähmlich jeder = CA; daher auch alle Durchmesser.

14. Ebene Figuren, die in gerade Linien als Seiten eingeschlossen sind, heissen geradelinicht. Dreyecke (triangula) die drey Seiten haben; Vierecke, die vier, Vielecke (polygona) die mehr haben.

Anm. Man nennt im Deutschen wie im Griechischen die Figuren nach der Zahl der Winkel; im Lateinischen nach der Zahl der Seiten; Fünfeck, Sechseck, Siebeneck ꝛc. pentagonum, hexagonum, heptagonum &c.

15. Ein gleichseitiges Dreyeck (aequilaterum, isopleuron) hat alle drey Seiten von einer Grösse. 12. F. Ein gleichschenklichtes (aequicrurum, isosceles) zweene gleiche Schenkel AC, CB über der Grundlinie AB; 13. F. ein ungleichseitiges (scalenum) keine Seite der andern gleich 14. F.

Rechtwinklicht heisst ein Dreyeck, das einen rechten Winkel hat, stumpfwinklicht, das einen stumpfen hat, spitzwinklicht, das lauter spitzige hat 15. 16. 17. F.

16. Ein Quadrat ABCD (18. F.) hat vier gleiche Seiten und so viel rechte Winkel. Ein Rechteck (rectangulum) rechte Winkel und ungleiche Seiten; 19. F. Eine Raute 20. F. (Rhom-

Digitized by Google

(Rhombus) gleiche Seiten und schiefe Winkel, eine länglichte Raute (Rhomboides) die einander gegenüberstehenden Seiten gleich groß, aber weder alle Seiten gleich, noch lauter rechte Winkel (21. F.); Andere Vierecke heissen ungleichseitige Vierecke (Trapezia) 22. F.

17. Ein Parallelogramm hat vier Seiten, da die gegenüberstehenden gleich sind.

18. Ein ordentliches Vieleck (regulare) 23. F. hat lauter gleiche Seiten und Winkel: andere heissen unordentliche 24. F.

19. Wenn in zwo Figuren einerley Winkel in einerley Ordnung nach einander folgen, und die Seiten, welche einerley Winkel in beyden Figuren einschliessen, ebenfalls in einerley Ordnung Proportionen ausmachen, so heissen diese Figuren ähnlich.

20. Eine Figur heisst in einem Kreise beschrieben (inscripta circulo) wenn sich die Scheitel aller ihrer Winkel in des Kreises Umfange befinden; und der Kreis heisst alsdenn um die Figur beschrieben (circumscriptus) 23. F. Wenn aber alle Seiten einer Figur den Umfang eines Kreises berühren, heisst er in sie, und sie um ihn beschrieben. 25. F.

Mit allen diesen Erklärungen, wollen die Geometern nicht sagen, daß solche Dinge vorhanden oder möglich sind. Sie bestimmen nur die Bedeutungen ihrer Wörter. Die Folge muß zei-

Digitized by Google

zeigen, ob diese Wörter Zeichen von Begriffen oder leere Töne sind.

Foderungen (Postulata).

1. Durch jede zweene gegebene Puncte eine gerade Linie zu ziehen, und solche nach Gefallen zu verlängern.

Durch jede zweene Puncte einer geraden Linie ist ihre Lage (positio) gegeben (6. Erkl.) durch ihre Endpuncte auch die Länge (magnitudo).

2. Aus jedem Mittelpuncte mit jedem Halbmesser einen Kreis zu beschreiben.

Grundsätze (Axiomata).

1. Durch zween Puncte geht nur eine gerade Linie. (6. Erkl.) Also schliessen zwo gerade Linien keinen Raum ein.

2. Wenn zwo gerade Linien zusammen stossen, ohne eine einzige gerade Linie auszumachen, so haben sie nichts gemein als einen Punct, verlängert schneiden sie einander in diesem Puncte, so daß von jeder Linie etwas auf beyden entgegengesetzten Seiten des Punctes ist.

3. Grössen, die dergestalt auf einander können gelegt werden, daß jeder Gränzen, und alles, was dazwischen enthalten ist, auf die Gränzen und das dazwischen enthaltene der andern fallen, sind gleich und ähnlich. Man sagt von ihnen, daß sie einander decken (congruunt).

4. Ge-

Digitized by Google

4. Gerade Linien und Winkel, die gleich sind, decken einander.

Grössen, die einander decken, können eine völlig in den Raum der andern gesetzt werden, also ist unter ihnen für die geometrische Betrachtung kein Unterschied.

5. Alle rechte Winkel sind gleich, denn sie decken einander (11. Erkl.).

6. Der Durchmesser DA 26. F. theilet den Kreis in zwey ähnliche und gleiche Stücke, DBA, DbA;

Denn wenn man sich das Stück DBA unter DA gelegt vorstellt, daß die Puncte D, A und folglich die Linie DA (1. Grundf.) ungeändert bleiben, so muß jeder Punct des Umfanges des herunter gelegten Stückes DBA am Ende einer Linie liegen, die durch C gehet und dem Halbmesser gleich ist, (13. Erkl.) aber am Ende jeder solcher Linie liegt ein Punct des Umfanges des Stückes DbA; also fällt jeder Punct des einen Umfanges auf einen Punct des andern, oder beyde Umfänge decken einander; die Linie DA aber ist die andere Gränze dieser beyden Stücken der Kreisfläche, und beyden gemein, also sind beyde gleich (3. Grundf.).

Wenn man von einem Puncte des Umfanges B; die Linie BC zieht, so deckt der Winkel BCA, den ihm gleichen bCA (4. Gr.) und so fällt jeder Punct des einen Halbkreises auf einen eigenen des andern.

Digitized by Google

7. Der Umfang eines Kreises um den Mittelpunct A, 27. F. ist eine zusammenhängende krumme Linie; wenn also von der geraden Linie BC, ein Punct wie B innerhalb des Umfanges, d. i. näher bey dem Mittelpuncte ist als des Kreises Halbmesser beträgt, und ein anderer C ausserhalb des Umfanges; so schneidet die gerade Linie den Umfang des Kreises Eben das folgt, wenn das vorige von den Puncten K, F, eines andern Kreises angenommen wird.

8. Eine unbegränzte gerade Linie AB 28. F. theilet die unbegränzte Ebene, in der sie gezogen ist, in zweene Theile, die an ihren entgegengesetzten Seiten liegen.

Zusatz. Es ist möglich, aus jedem gegebenen Puncte F, einen Kreis zu ziehen, der eine gegebene gerade unbegränzte Linie in mehr als einem Puncte schneidet.

Nach einem willkührlichen Punkte der Linie, O, ziehe man FO, und beschreibe mit einem grössern Halbmesser FP, einen Kreis, dessen Durchmesser PQ sey. Der Halbkreis (6. Grundſ.) der von QP nach B zu liegt, hat P unter AB, und Q darüber, und muß also diese Linie schneiden, wenn er zusammenhängend von P nach Q kommen soll. Eben so hat der Halbkreis, der von PQ nach A zu lieget, P über AB, C, darunter, und muß diese Linie wieder schneiden, von einem Puncte zum andern zu kommen.

Eine

Eine gerade Linie die durch einen Punct innerhalb eines Kreises geht, schneidet ihn wenigstens in zween Orten.

Ist der Punct ein Mittelpunct, so ist sie ein Durchmesser, und die Sache erhellt aus 13. Erkl.

Ist es ein anderer Punct O; so ziehe man durch ihn den Durchmesser QP; der Halbkreis der sich auf jeder Seite desselben befindet (6) schliesst mit ihm einen Raum ein, aus welchem das Stück gerade Linie, das sich auf eben der Seite (8) befindet, nicht heraus kann ohne ihn zu schneiden.

1. Satz. Aufgabe.

Ueber einer gegebenen Linie AB ein gleichseitiges Dreyeck zu beschreiben. 29. F.

Aufl. Man beschreibe aus den Mittelpuncten A, B, mit den Halbmessern AB, BA, Kreise, die einander in C schneiden; (2. Foder.) und ziehe nach C von A, B, gerade Linien; (1. Foder.) so ist ACB das verlangte Dreyeck.

Bew. Wenn es einen Durchschnitt C giebt, so ist AC = AB (13. Erkl.) = BC;

Daß es aber einen Durchschnitt giebt, erhellt so: Man verlängere AB, bis BD = AB (1. Foder.) so geht der Kreis um B, durch D (13. Erkl.) einen Punct auserhalb des Kreises um A, (weil AD = 2 AB) und auch durch A,

Digitized by Google

einen Punct innerhalb desselben; folglich schneidet er jenen Kreis (7. Grundſ.).

2. Satz. Lehrſatz.

Wenn (30. F.) zwo Seiten mit dem eingeſchloſſenen Winkel, in einem Dreyecke ſo groß als in dem andern ſind; ſo iſt alles in beyden Dreyecken gleich.

Bew. Es ſey AB = ab, AC = ac, A = a; Man lege das zweyte Dreyeck ſo auf das erſte, daß a auf A und ab längſt AB fällt, ſo fällt b auf B (3. Grundſ.) und ac längſt AC (4. Grundſ.) und c auf C (3. Gr.) alſo decken bc, BC, und die Winkel b, B; c, C, auch der Dreyecke ganze Flächen einander, oder alles dieſes iſt gleich.

1. Zuſ. Zwo Seiten mit dem eingeſchloſſenen Winkel beſtimmen ein Dreyeck.

2. Zuſ. Es ſey AB = AC, und ab = ac oder beyde Dreyecke ſeyen gleichſchenklicht, ſo kann man abc auſer der vorigen Lage auch noch ſo auf ABC legen, daß a wieder auf A, aber ab längſt AC fällt; Alsdenn fällt noch ac längſt AB, (4. Grundſ.) und b auf C, c auf B, (3. Grundſ.) alſo decken beyde Dreyecke auch einander in dieſer Lage, und es iſt b = C; c = B; (3. Grundſ.) wegen der vorigen Bedeckung aber war b = B, c = C; alſo iſt C = B;

3. Zuſ. In einem gleichſchenklichten Dreyecke ABC, ſind die Winkel an der Grundlinie gleich.

Digitized by Google

gleich. Denn man kann sich eben das Dreyeck noch einmahl vorstellen, abc, und die beyden Bedeckungen betrachten.

3. Satz. Lehrsatz.

Wenn in zweyen Dreyecken, 30. F. B=b, C=c, und BC=bc; oder eine Seite mit den anliegenden Winkeln in einem wie in dem andern ist, so ist alles übrige gleich.

Bew. Man lege den Punct b auf B und bc längst BC, so fällt der Punct c auf C (3. Gr.) und ba längst BA, ca längst CA (4. Gr.); Also liegt a zugleich in BA und in CA, folglich auf A (3. Gr.) und die Dreyecke decken einander wie vorhin, also ist A=a; BA=ba, AC=ac;

1. Zus. Wenn B=C also auch b=c, so kann man die Dreyecke auch so auf einander legen, daß c, B, und b, C, einander decken, und noch fällt a auf A. Also ist nun ca=BA; ba=CA, folglich BA=CA.

2. Zus. Wenn in einem Dreyecke ABC die beyden Winkel an der Grundlinie B, C, gleich sind, so sind auch die beyden Seiten BA, CA, gleich.

3. Zus. In einem gleichseitigen Dreyecke, sind alle drey Winkel gleich (2. S. 3. Zus.) und wenn in einem Dreyecke alle Winkel gleich sind, ist es gleichseitig (3. S. 2. Zus.).

Digitized by Google

4. Zus. Ein gleichseitiges Dreyeck ist eine reguläre Figur (18. Erkl.).

4. Satz. Lehrsatz.

Wenn in zweyen Dreyecken alle Seiten gleich sind; BA = ba; BC = bc; AC = ac; so ist alles in beyden Dreyecken gleich.

Bew. Man lege bc dergestalt auf BC, (3. Gr.) daß a und A auf verschiedene Seiten dieser Linie fallen. So kann man jetzo dreyerley Lagen für den Punct a annehmen; In der verlängerten Linie AC 31. F. oder so daß Aa innerhalb des Winkels BAC 32. F. oder daß sie auserhalb desselben 32. * F. fällt.

1. Lage. Weil $\mathcal{B}$ = ba so ist A = a (2. S. 3. Z.) folglich △BAC = △bac (2. S.).

2. Lage. Da B und C auf verschiedenen Seiten von Aa liegen, so ist BAC = BAa + aAC und bac = baA + Aac; aber BAa = BaA; aAC = Aac also BAC = bac; und die Dreyecke wieder gleich.

3. Lage. BAC = BAa − CAa; bac = baA − caA und BAa = baA; CAa = caA.

1. Zus. Aus drey Seiten läßt sich nur ein Dreyeck machen, ob man solchem gleich verschiedene Stellungen geben kann.

2. Zus. Im 2. 3. 4. S. stehen gleiche Seiten gleichen Winkeln und gleiche Winkel gleichen Seiten gegenüber.

5. Satz.

5. Satz. Aufgabe.

Einen gegebenen Winkel EAF zu halbiren 33. F.

Aufl. Auf seinen Schenkeln nehme man nach Gefallen AB = AC; ziehe BC und beschreibe darüber das gleichseitige Dreyeck BDC; (1. S.) so wird AD den Winkel halbiren.

Bew. Weil vermöge der Verzeichnung AB = AC, BD = DC; und AD den Dreyecken ABD, ADC, gemein ist, so ist BAD = DAC (4. S.) = $\frac{1}{2}$ EAF.

Zus. Durch neues Halbiren läßt sich der erst vorgegebene Winkel in 4, 8, 16, u. s. f. Theile theilen, so daß die nte Arbeit 2^n Theile giebt.

6. Satz. Aufgabe.

Eine gegebene gerade Linie AB zu halbiren 38. F.

Aufl. Ueber ihr beschreibe man ein gleichseitiges Dreyeck, und halbire dessen Winkel ACB; die Linie CE die solches thut, halbirt AB in E.

Bew. Die Linie, welche den Winkel halbirt, geht zwischen seinen Schenkeln, und muß also irgendwo zwischen A und B, die Linie AB schneiden. Es geschehe dieses in E. In den Dreyecken ACE, CEB, ist AC = CB, CE = CE, ACE = ECB; also AE = EB (2. S.).

Anm. Die Halbirung geschieht, wenn man auf beyden Seiten von AB, gleichseitige Dreyecke beschreibt, und durch ihre Spitzen CD zieht (5. S.).

Digitized by Google

1. Zuf. Der Zusatz voriger Aufgabe findet auch von der geraden Linie statt.

2. Zuf. CEA = CEB = R (welches Zeichen einen rechten Winkel bedeuten soll) (11. Erkl.).

7. Satz. Aufgabe.

I. Durch einen gegebenen Punct C, auf eine gegebene unbegränzte Linie AB, ein Perpendikel aufzurichten 35. F.

II. Aus einem gegebenen Puncte C auf eine gegebene unbegränzte Linie AB ein Perpendikel zu fällen 34. F.

Aufl. Man beschreibe aus C einen Kreis, der AB in M, N, schneidet, und über MN ein gleichseitiges Dreyeck; MND, so ist DC das gesuchte Loth.

Beweis. I. Aus C kann man allerdings auf beyde Seiten CM = CN nehmen. Also ist das gefoderte möglich. Nun haben die Dreyecke CMD, CND, einerley Seiten vermöge der Verzeichnung; also auch einerley Winkel (4. S.) also ist DCM = DCN = R (11. Erkl.).

II. Die Möglichkeit der Foderung erhellt aus des 8 Grundsatzes Zusatze. Man ziehe CM, CN; so haben die Dreyecke DCM, DCN; DC gemein, und DM = DN, CM = CN; also die Winkel MDC = NDC (4. S.). Weil also in den Dreyecken MDE; NDE, DE gemein; DM = DN und MDE = NDE, so ist DEM = DEN (2. S.) = R (11. Erkl.).

8. Satz.

Digitized by Google

8. Satz. Lehrsatz.

Die beyden Nebenwinkel EBD, EBC, 37. F. betragen allezeit zusammen so viel als zweene rechte.

Bew. Man richte durch B auf CD das Loth BA auf (7. S.). Wenn die beyden Nebenwinkel nicht jeder ein rechter sind; da der Satz ohnedem in die Augen fällt, so muß einer von ihnen entweder stumpf, oder spitzig seyn. Es sey einer stumpf, oder EBC > R weil nun CBA = R = ABD; so ist EBC = R + ABE; und der Nebenwinkel EBD = R — ABE also beyde zusammen = 2 R.

Ist einer spitzig wie EBD = R — ABE so ist sein Nebenwinkel EBC = R + ABE.

1. Zus. Wenn zweene Winkel EBC, EBF, den Schenkel EB gemein haben, und zusammen = 2 R sind, so sind es Nebenwinkel, oder BF ist die Verlängerung von CB; Denn man setze, sie sey es nicht, und verlängere CB in D, so ist CBE + EBD = 2 R = CBE + EBF, wie angenommen wird; also EBD = EBF, daher diese gleichen Winkel einander decken.

2. Zus. Alle Winkel, die an einer Spitze H, auf einer Seite der Linie GK 38. F. liegen, machen zusammen zween rechte. Denn einige von ihnen machen zusammen den einen rechten LHK, die übrigen den andern LHG. Und alle Winkel um einen Punct ringsherum machen zusammen vier rechte.

Digitized by Google

3. Zuſ. Von zween Nebenwinkeln, deren keiner ein rechter iſt, iſt allezeit einer ſpitzig, der andere ſtumpf.

4 Zuſ. Scheitelwinkel ſind gleich; oder ACE = BCD 39. F. Denn ACE + ECB = 2 R = ECB + BCD.

9. Satz. Lehrſatz.

Wenn in ein einem Dreyecke 40. F. eine Seite BC verlängert wird, ſo iſt der äuſere Winkel ACD gröſſer als der innere BAC welcher der verlängerten Seite gegenüber ſtehet.

Beweis. Man halbire AC in E, und ziehe BE auf deren Verlängerung man EF = BE nehme; Weil F über BCD, und von AC nach der Seite D zu liegt, ſo iſt ACF < ACD; aber in den Dreyecken AEB, FEC, ſind die eben ſo genannten Winkel gleich (8. S. 4. Z.) und EF = BE; EC = AE; alſo BAE = ECF (2. S.) und folglich kleiner als ACD.

1. Zuſ. AC in CG verlängert giebt auf eben die Art BCG > ABC; Aber BCG = ACD (8. S. 4. Z.) alſo iſt der äuſere Winkel ACD gröſſer als jeder der beyden innern ihm entgegengeſetzten (oppoſitorum) von denen nehmlich keiner ſein Nebenwinkel ACB iſt.

2. Zuſ. BAC + ABC < ACD + ACB; die letzte Summe aber iſt = 2 R (8. S.) alſo iſt die erſte < 2 R. Von ABC + ACB erhellt es eben ſo; imgleichen von BAC + ABC wenn man BA verlängert. 3. Zuſ.

Digitized by Google

3. Zuſ. In einem Dreyecke, das einen rechten Winkel hat, ſind die beyden andern ſpitzig; und eben ſo, wenn es einen ſtumpfen hat. Dieſes zeigt, wievielerley Dreyecke, in Abſicht auf die Winkel möglich ſind (15. Erkl.).

4. Zuſ. Auf eine gegebene Linie, giebt es von einem Puncte auſer ihr (3. Z) und durch einen Punct in ihr (8. S.) nur ein einziges Perpendikel.

5. Zuſ. Wenn MCN 36. F. ein gleichſchenklichtes Dreyeck, C ſeine Spitze, und E mitten in der Grundlinie MN iſt; ſo halbiret CE den Winkel MCN und ſteht auf MN ſenkrecht (4. S. 11. Erkl.) und ein Perpendikel von C auf MN iſt CE (4. Z.) und eine Linie, die MCN halbirt, iſt CE.

6. Zuſ. In einem Dreyecke ABC 41. F. ſey AC > AB ſo iſt ABC > C; denn man nehme AD = AB ſo fällt D zwiſchen A und C, alſo iſt ABD < ABC; aber ABD = ADB (2. S. 3. Z.) nnd ADB > C (9. S.) alſo noch vielmehr ABC > C.

Umgekehrt, wenn ABC > C ſo iſt AC > AB; denn wären beyde Seiten gleich, ſo wären die Winkel auch gleich, und wäre AB > AC, ſo wäre ACB > ABC.

7. Zuſ. Im Dreyecke der 42. F. nehme man AD = AC auf der verlängerten BA; ſo iſt DCB > DCA; und DCA = D (2. S 3. Z.) alſo DB > BC (6. Z.) das iſt CA + AB > CB;

Digitized by Google

CB; dergleichen Verfahren bey C, und bey B, beweiset AC + CB > AB und CB + BA > AC; oder daß allemahl zwo Seiten eines Dreyecks, welche man will, zusammen gröſſer als die dritte sind.

Der Unterschied von zwo Seiten, ist kleiner als die dritte. In 41. Fig. sey AC > AB; Man nehme AD = AB; daß CD = AC — AB; so ist ABD = ADB (2. S. 3. Z.) spitzig (9. S. 2. Z.) daher BDC stumpf (8. S. 3. Z.) folglich der gröſste Winkel im Dreyecke BDC (9. S. 3. Z.) also BC > CD (9. S. 6. Z.).

8. Zus. Aus drey Seiten, wo es voriger Zus. verstattet, läſst sich ein einziges Dreyeck (4. S.) wie im 1. S. zeichnen.

9. Zus. Wenn innerhalb des Dreyecks BAC 43. F. der Punct D genommen wird; so ist BDC > A aber BD + DC < BA + AC; Man verlängere BD bis sie AC in E schneidet; so ist BDC > DEC und DEC > A also BDC > A; ferner BA + AE > BE oder > BD + DE und DE + EC > DC also BA + AE + DE + EC > BD + DE + DC und wenn man DE auf beyden Seiten abziehet BA + AC > BD + DC.

10. Zus. Von einem gegebenen Puncte C 44. F. ist die kürzeste Linie an eine gegebene Linie BD, die Entfernung; das Loth CA. Denn wenn man jede andere Linie CF zieht, so ist der Winkel CFA < A (3. Z.) also CF > CA (6. Z.).

11.

Digitized by Google

11. Zuſ. Auf jeder Seite des Lothes CA 44. F. giebt es nur eine Linie durch C, die mit BD einen gegebenen Winkel macht. Es ſey CFA dieſer Winkel, ſo iſt für jeden Punct H zwiſchen F und A; CHA > CFA und für jeden Punct G über F hinaus CGA < CFA (9. S.); Nimmt man aber auf der andern Seite AM = AF, ſo iſt AMF = CFC (2. S.); wäre ein ſtumpfer Winkel gegeben geweſen, ſo hätte man ſolchen CFB gleich geſetzt. (8. S.).

12. Zuſ. Wenn F weiter von A liegt als H; ſo iſt CFH < CHA (9. S.) und beyde dieſe Winkel ſind ſpitzig (3. Z.) folglich CHF ſtumpf (8. S. 3. Z.) und gröſſer als CFH; alſo CF > CH (6. Z.).

13. Zuſ. Wenn FCA ein gegebener ſpitziger Winkel iſt, ſo kann man durch C Linien ziehen, die mit CA gröſſere oder kleinere Winkel machen, nachdem man G oder H nimmt.

14. Zuſ. Wenn in zwey Dreyecken (35. F.) A = a, C = c, und AB = ab; ſo iſt alles übrige gleich. Man laſſe von B, b, die Lothe BD, bd, auf AC, ac, und lege das eine Dreyeck auf das andere, ſo daß a auf A, b auf B, und ac längſt AC hinfällt, ſo müſſen die Lothe BD, bd, einander decken und auf D fallen (4. Zuſ.) und c liegt auf eben der Seite von BD auf der C liegt, weil BCD; bcd, allemahl ſpitzig ſind (3. Zuſ.) und wenn c nicht auf C fällt, ſo giebt es zwo Linien durch B oder b, die mit AC auf ei-

einer Seite des Lothes gleiche Winkel c = C machen; wieder den 11. Z. Folglich fällt c auf C und die Dreyecke decken einander wie im 3. S. von dem gegenwärtiges die Ergänzung ist; daß nehmlich zweene Winkel und eine Seite allemahl nur ein Dreyeck bestimmen.

10. Satz. Aufgabe.

An einer gegebenen Linie ac 45. F. gegebenen Punct a; einen Winkel zu machen, der einem gegebenen A gleich ist.

Auflös. Man ziehe nach Gefallen durch die Schenkel von A eine Linie BC um ein Dreyeck ABC zu bekommen; Nun beschreibe man über ac ein Dreyeck, das eben die Seiten ac = AC; bc = BC, ab = AB hat (9. S. 8. Z.) so wird a = A seyn (4. S.).

11. Satz. Lehrsatz.

Wenn zwo Linien AB, CD, 46. Fig. von einer dritten so geschnitten werden, daß I) die beyden innern entgegengesetzten Winkel BGH + GHD = 2 R oder II) der äusere EGB = GHD dem innern entgegengesetzten, oder III) die Wechselswinkel DHG = HGA; so sind AB, CD, gleichlaufend.

Bew. Stiessen AB, HD, nach der Seite B, D. von GH zusammen; so gäbe es ein Dreyeck, dessen Grundlinie GH, die beyden Seiten GB, HD, bis zum Zusammenstossen verlängert wä-

Digitized by Google

wären. Von diesem Dreyecke wären also die beyden Winkel an der Grundlinie zusammen = 2 R wieder 9. S. 2. Z.

Weil AGH + HGB = 2 R = CHG + GHD, so ist AGH + HGB + CHG + GHD = 4 R und davon HGB + GHD = 2 R abgezogen, bleibt AGH + CHG = 2 R; Also kann auch nach der Seite C, A, von GH zu, kein Dreyeck von den verlängerten GA, HC, gemacht werden.

II. Wenn EGB = GHD so ist HGB = 2 R — EGB = 2 R — GHD oder HGB + GHD = 2 R.

III. Wenn AGH = GHD, so ist HGB = 2 R — AGH = 2 R — GHD, und HGB + GHD = 2 R.

Ein Satz von diesen dreyen angenommen hat die übrigen zu Folgen.

1. Zus. Durch einen gegebenen Punct G mit einer gegebenen Linie CD eine gleichlaufende zu ziehen, ziehe man GH nach Gefallen, und mache HGA = GHD.

2. Zus. Es ist gewiß, daß man durch C Linien ziehen kann, die mit CD zusammenstossen, wenn man nur zu G einen Punct in CD nimmt. Man kann sich also vorstellen, daß AB um G als einen Mittelpunct, Kreisförmig nach GH zu gedreht, endlich in Lagen kömmt, in denen sie CD schneidet. Ich behaupte, der erste Durchschnitt mit CD werde sich nicht angeben lassen.

Ges.

Gesetzt, er sey K, daß HK eine bestimmte Linie ist, so nehme man HI > HK und ziehe GI; welches also eine Lage seyn wird, in der CD von der herumgedreheten AB geschnitten wird, ehe sie noch in die Lage GK kömmt; oder I wird ein Durchschnittspunct seyn, der vor K vorhergehet.

3. Zus. Der erste Durchschnittspunct der herumgedreheten B mit CD, liegt weiter von H als jede Weite beträgt, die sich bestimmen lässt, d. i. als jede endliche Weite. Mann kann also sagen, er liege unendlich weit von H. Mit dieser Entfernung des ersten Durchschnittspunctes, lässt sich also HG als eine bestimmte und endliche Linie nicht dergestalt vergleichen, daß man angeben könnte, wievielmahl HG müsste genommen werden, um die Weite von H als an den ersten Durchschnittspunct, oder eine nächst grössere Weite zu bekommen.

4. Zus. AB und CD stossen nicht zusammen; GH mag klein oder groß seyn, oder sie mögen nahe oder weit von einander seyn. Es kömmt hier nicht auf ihre Entfernung, sondern auf ihre Lage an, die durch den Winkel, den jede mit EF macht, bestimmt wird, und also bey beyden einerley ist.

5. Zus. Wenn aber GP 47. F. ohne Ende verlängert, nicht mit CD zusammen stösst, so muß solches von beyder Linien Abstande HG, nicht von ihrer Lage gegen einander herrühren. Man schiebe AB mit dem unveränderlich daran

Digitized by Google

bleibenden Winkel BGP längst EH so hinunter, daß sich der Winkel EGB nicht ändert, daß AB nach und nach in solche Lagen kömmt wie ab eine vorstellt, so muß GP, so kurz man sie auch annähme, gewiß in Lagen wie gp kommen, in denen sie CD schneidet. Denn die Linie AB kann ganz herunter rücken, bis sie auf CD und G in H fällt, da denn GP nothwendig unter HD, in Hh fallen, und also zuvor ganz durch HD durchgeschoben seyn muß. Wie nun auf diese Art erhellt, daß Linien, die gegen EF eben die Lage haben, die GP hat, CD gewiß schneiden, so erhellt auch, daß man nicht annehmen kann GP komme durch das erwähnte Herunterziehen mit AB, in eine Lage, in der sie CD schneidet, ohne zugleich anzunehmen, sie habe CD schon zuvor geschnitten, ehe sie in diese Lage gekommen ist. Denn so bald GP in einer solchen Lage, z. E. in gp ist, so geht sie, nach q verlängert, unter CD durch, und die Puncte zwischen q und p müssen also vor p, durch CD gegangen seyn. Also läßt sich hier kein erster Punct des Durchschiebens angeben, wie bey dem 2. Zus. kein erster Punct des Durchschnittes, doch mit dem Unterschiede, daß hier nicht wie dort der Schluß gilt, dieser erste Punct lasse sich deßwegen nicht angeben, weil er weiter als alle Puncte, die sich angeben lassen, von H entfernt liege. Denn man begreift, daß dieser Schluß wegfiele, wenn man nur annähme GP in der ersten Lage schnitte schon

CD, in einer bestimmten Entfernung von H, da denn dieser Durchschnitt der erwähnte erste seyn würde, dergleichen sich aber im 2. Zus. nicht annehmen läßt.

6. Zus. Es giebt also ohne Zweifel Dreyecke, deren beyde Winkel an der längst HG fallenden Grundlinie, GHD, und = HGP sind. Eines von ihnen ist Hgp: Stossen nun GP und CD ohne Ende verlängert nie zusammen, so giebt es kein solches Dreyeck, das HG oder eine grössere Länge zur Grundlinie hat. Man sieht aber nicht, wie blos diese längere Grundlinie die Dreyecke unmöglich machen soll; Man wird vielmehr nach dem, was man bey den möglichen Dreyecken dieser Art wahrgenommen hat, urtheilen; daß bey einer längern Grundlinie nur die Seiten bis zum Zusammenstossen weiter müssen fortgezogen werden. Diese Betrachtungen werden uns berechtigen, folgendes anzunehmen:

12. Satz. 9. Grundsatz.

Wenn zwo gerade Linien GP; CD, von einer dritten EF so geschnitten werden, daß die innern entgegengesetzten Winkel HGP + GHD < 2 R so stossen sie verlängert nach der Seite von EF wo diese Winkel liegen, zusammen.

Was nehmlich von diesen Winkeln angenommen wird, ist so viel als nähme man an EGP $>$ GHD oder daß GP zwischen die gleichlaufenden AB, CD, (11. S.) hineinfällt.

Anm.

Digitized by Google

Anm. Dieser Satz ist beym Euklid der 11. Grundsatz, zunächst bey dem: daß alle rechte Winkel gleich sind. So offenbahr als dieser ist er nun gewiß nicht. Und vielleicht hat er gerade an dieser Stelle anstößigen zu scheinen wo von dem was ihn anzunehmen berechtiget noch so wenig aus einander gesetzt ist. Gregorius in seiner Ausgabe Euklids berichtet daß ihn einige Manuscripte unter die Postulata setzen. So wäre freylich die Bemühung ihn einleuchtender zu machen vermieden. In der ersten Vorrede gegenwärtigen Buchs habe ich etwas von diesem Satze gesagt. Unter den Unternehmungen die Hr. Klügel in daselbst angeführter Schrift beurtheilt hat, zeichne ich ein Paar, ihrer Umständlichkeit wegen aus: Vitale Giordano da Bitonto, Euclide Restituto (Rom 1680; fol. Geometrische Elemente) im 1. Buche nach den 26 Satze 45 Seite. Hieronymi Saccherii S. I. Euclides ab omni naeuo vindicatus Mailand 1733; 4°. Auch neuerlich haben sich mehrere mit diesem Gegenstande beschäfftiget. Hr. Hofr. Karsten Versuch einer völlig berichtigten Theorie von den Parallellinien Halle 1778; Hr. Prof. Hindenburg Neues System der Parallellinien, Leipziger Magazin 1781; 2 u. 3 Stück.

1. Zus. Durch einen Punct G, geht mit einer CD, nur eine AB gleichlaufend. Und wenn eine Linie GP eine von zwo Parallelen AB schneidet, so schneidet sie auch die andere CD.

2. Zus. Jede Linie EF schneidet zwo gleichlaufende Linien, so daß es mit den Winkeln die im 11. S. erwähnte Beschaffenheit hat. Denn eine der gleichlaufenden sey CD; sie hat durch G nur eine gleichlaufende 1. Zus. und dieses ist AB so nach dem 11. S. gezogen worden.

Digitized by Google

Fänden die Bedingungen des 11. S. bey den Winkeln einer andern Linie MN die AB und CD in O; S; schneidet nicht statt, wäre zum Ex. MOB < MSD, so wäre AOS < 2 R — CSO (8 S. 4 Z.) also AOS + CSO < 2 R und BA DC, müsten vermöge des 12. S. nach der Seite A, C, zusammenstossen.

3. Zus. Parallelen BA, CD, zwischen Parallelen AC, BD, (48 F.) sind gleich. Denn man ziehe AD, so ist DBA = ADC; ADB = DAC (2. Zus.) folglich △ADB = △ADC (3. S.).

4. Zus. Wenn BA = CD und AC = BD, so ist AB mit CD, und AC mit DB vermöge des 11. S. gleichlaufend; weil △ABD = △ACD (4. S.) und also die Wechselswinkel an AD gleich sind.

5. Zus. RS, TV, 49. F. seyen Parallelen. Man lasse von der obern zween willkührlichen Puncten M, O, auf die untere Perpendikel MN, OP fallen, daß also bey N, P, rechte Winkel sind, so sind auch rechte Winkel bey M, O, (2. Zus.) und die Perpendikel gleichlaufend (11. S.) also gleich (3. Zus.).

6. Zus. Ein Parallelogramm (4 Z.) wird durch die Diagonale AD in zwey gleiche Dreyecke getheilet. Seine gegenüberstehende Winkel C, B, sind gleich, und die an einer Seite liegenden DCA + CAB = 2 R.

7. Zus.

Digitized by Google

7. Zus. Ein Parallelogramm, in dem ein rechter Winkel ist, hat lauter rechte Winkel.

8 Zus. Aus den beyden verschiedenen Seiten AC, CD, eines Parallelogramms, und dem Winkel, den sie einschliessen, C, solches zu zeichnen; zeichne man erst das Dreyeck ACD, das diese beyden Seiten mit dem Winkel geben, und beschreibe über AD, eben das Dreyeck ABD, nur so daß AB = CD, DB = AC; (6. Zus.).

9. Zus. Wenn die beyden Seiten von verschiedener Grösse sind, und der Winkel schief ist, so kömmt auf diese Art die länglichte Raute (16. Erkl.) heraus; die Raute aber, wenn die Seiten gleich sind; das Rechteck, wenn ungleiche Seiten AC, CD, in einem rechten Winkel C zusammengesetzt werden (7 Zus.) und das Quadrat, wenn hie die Seiten gleich sind. Der 3. und 5. Zus. geben noch andere Arten, diese Figuren zu verzeichnen, deren Möglichkeit also aus gegenwärtigem 12. S. dargethan ist, und die allein Parallelogramme sind.

10. Zus. Im Parallelogramm PQRS 50. F. sey die Diagonale PR, und durch dieser willkührlichen Punct Y; TV mit PQ, WX mit RQ parallel gezogen; So entstehen vier Parallelogramme, da die beyden durch welche die Diagonale nicht gehet, gleich sind. Denn △PSR = △PRQ (6. Zus.) und weil TYWP; XYVR, Parallelogramme sind, so ist △TYP = △PYW; △XYR = △RYV; also △PSR — △TYP —

Digitized by Google

$\triangle XYR = \triangle PRQ - \triangle PYW - \triangle RYV$ d. i. $SXYT = YVQW$.

11. Zuſ. Wenn $SP = SR$ alſo SQ eine Raute, (16. Erkl.) ſo iſt $SPR = SRP$ (2. S. 3. Zuſ.) $= TYP$ weil TY, SR parallel ſind, alſo $TP = TY$ (3. S. 2. Zuſ.) $= PW$ (3. Zuſ.) und TW eine Raute, deren Seite PW;

Eben ſo $PRQ = QPR$ (2. S. 3. Z.) $= VYR$ wegen der Parallelen VY, PQ, alſo $VR = VY$ (3. S. 2. Z.) $= WQ$ (3. Zuſ) und XV eine Raute, deren Seite $= WQ$. Der länglichten Raute YQ Seiten ſind $YW = XP$ und WQ.

Der länglichten Raute SY Seiten ſind $TY = TP$ (wegen der Raute TW) und $ST = RV$ (3. Zuſ.) $= WQ$ (wegen der Raute XV.).

Wird SPQ ein rechter Winkel ſo werden alle übrige Winkel bey der Raute SQ. auch rechte (7. Zuſ.) und es wird aus ihr ein Quadrat, deſſen Seite PQ; aus zwey Stücken, PW, PQ, beſteht die ganz willkührlich ſind, weil man durch jedes nach Gefallen genommene W, nur WX ziehen kann. Da verwandeln ſich alſo die beyden Rauten, in Quadrate der Seiten PW, WQ. und die beyden länglichten Rauten in Rechtecke deren jedes PW, WQ, zu Seiten hat. Einer Linie PQ, Quadrat SQ, beſteht alſo, aus den beyden Quadraten ihrer beyden Stücken PW, WQ, und dem doppelten Rechtecke, eines Stücks PW mit dem andern WQ.

12.

Digitized by Google

12. Zuſ. Man laſſe in der 46. F. GK ſich um G als einen Mittelpunct ſo drehen, daß der Winkel HGK ſich immer weiter öfnet, und alſo GK in die Lage GI u. ſ. w. kömmt; dieſe Linie, die ſich ſolchergeſtalt herumdrehet, ſchneidet HD in Puncten, K, I, die immer weiter und weiter von H liegen, oder der Durchſchnittspunct der Linie HD die ihre Lage nicht ändert, und der andern GK die ſich herumdrehet, rückt immer weiter und weiter von H in HD hinaus; und zugleich werden die Winkel KGB; IGB, immer kleiner und kleiner; d. i. die Lage der Linie, die ſich herumdrehet, kömmt der Lage der Parallellinie GB immer näher und näher; dieſe Näherung kann ohne Ende fortgeſetzt werden, bis beyde Linien zuſammen fallen. Ehe dieſes geſchieht, muß der Durchſchnittspunct in HD über alle Entfernungen, die ſich beſtimmen laſſen, hinausgerückt ſeyn. Denn bey jeder beſtimmten Entfernung z. E. HI; giebt er eine Linie GI die von GB unterſchieden iſt. Zwiſchen den Lagen der ſich herumdrehenden Linie, in der ſie von GB unterſchieden iſt, und HD in beſtimmten Entfernungen von H ſchneidet, und zwiſchen der Lage, da ſie auf GB fällt, befinden ſich mittlere, in denen ihre Durchſchnittspuncte weiter von H ſind, als ſich beſtimmen läſſt; durch ſie geſchieht der Uebergang aus den erſten Lagen in die letzte; und man kann ſie von der letzten nicht unterſcheiden, weil jede Linie durch G, deren Lage ſich von

Digitized by Google

GB unterscheiden lässt, mit CD in einer bestimmten Weite von H zusammenstösst (12. S.). Diese Durchschnittspuncte, die über alle bestimmten Entfernungen hinausliegen, nennt man unendlich entfernt, und sagt, die Parallelen GB, HD, schnitten einander in einer unendlichen Entfernung von H oder G; dieses heisst nichts weiter als: jede bestimmte Entfernung HI, giebt eine Linie GI, die mit HD nicht parallel ist; und man kann diese Entfernung so groß nehmen, daß die Lagen der Linien GB, GI um so einen kleinen Winkel man will unterschieden sind.

13. Zus. Eben so nehme man in der 49. F. auf der Parallele MS ein Stück MO von bestimmter Länge und lasse das Loth OP herab. Um M lasse man sich eine Linie ML eben so drehen, daß der Winkel NML immer wächst, so rückt ihr Durchschnittspunct mit dem Lothe, Q, immer näher nach O, und ihre Weite QP wird von MN immer weniger und weniger unterschieden. Diese Näherung kann man so weit treiben als man will, und zugleich wird G der Durchschnittspunct der Linien ML, NV, immer weiter hinausrücken; wenn ML, wie im 12. Z. nicht mehr von MS zu unterscheiden ist, so wird QP von OP oder MN nicht mehr zu unterscheiden seyn.

14. Zus. Nachdem ML in die Lage MS gekommen ist, lasse man sie sich immer so weiter fortdrehen, daß sie nun mit NM stumpfe Winkel

Digitized by Google

kel macht, wie MH; so wird sie rückwärts verlängert NV wieder schneiden, aber in Puncten, die linker Hand von N liegen, wenn ihre vorigen Durchschnittspuncte G, rechter Hand lagen. Werden also die Linien NG als bejahend angesehen, so sind die NK verneinend und der Uebergang aus jenen in diese geschiehet hie durch das Unendliche, wenn sich die Linie MG auf die beschriebene Art drehet, daß die NG wachsen. Drehte sie sich auf die entgegengesetzte Art, daß die Winkel NMG, und die Linien NG abnähmen, so geschähe dieser Uebergang in N durch die Verschwindung oder einen Durchgang durch o. Der Uebergang durch das Unendliche, heisst eigentlich nur soviel, daß NG, NK, nach verschiedenen Seiten von N, jede ohne Ende wachsen, wenn man MG, MK, so dreht, daß die Winkel NMG, NMK, bis zu rechten wachsen.

13. Satz. Lehrsatz.

In jedem Dreyecke ABC 51. F. ist die Summe aller drey Winkel $A+B+BCA=2R$.

Bew. Man ziehe CE mit AB gleichlaufend (11. S. 1. Zus.) und verlängere BC nach D so ist $ACE=A$; $ECD=B$ (12. S. 2. Z.) also $BCA+B+A=BCA+ECD+ECA=2R$ (8. S.).

1. Zus. $ACD+ACB=A+B+ACB$; also $ACD=A+B$.

2. Zuſ. Wenn B = R ſo iſt ABC + ACB = R; oder die beyden ſchiefen Winkel in einem rechtwinklichten Dreyecke betragen zuſammen auch einen rechten.

3. Zuſ. Wenn im 2. Zuſ. noch BA = BC, ſo iſt BAC = BCA (2. S. 3. Z.) = $\frac{1}{2}$ R.

4. Zuſ. In einem gleichſeitigen Dreyecke iſt jeder Winkel = $\frac{2}{3}$ R (2. S. 3. Z.).

5. Zuſ. Wenn in einem gleichſchenklichten, ein Winkel gegeben iſt, ſo ſind ſie alle gegeben. Es ſey BA = BC, und B gegeben; ſo iſt A + ACB = 2 R — B alſo A = ACB = R — $\frac{1}{2}$ B. Oder wenn A = ACB gegeben iſt, ſo iſt B = 2 R — 2 A.

Anm. Wie wir bisher die Winkel durch ihre Verhältniß zum rechten ausgedrückt haben, ſo kann man ſie auf andere willkührliche Arten ausdrücken. Man ſtelle ſich den rechten Winkel in 90 gleiche Theile getheilet vor; dieſes iſt ohne Zweifel möglich; ob wir gleich jetzo nicht wiſſen, wie wir dieſe Theilung bewerkſtelligen ſollen; denn man kann ein Ganzes in ſo viel Theile als man will eintheilen. Ein ſolcher Theil heiſſe ein Grad und $\frac{1}{60}$ von ihm eine Minute (minutia prima, *vel* minutum primum) $\frac{1}{60}$ der Minute und alſo $\frac{1}{60}$ $\frac{1}{60}$ des Grades, eine Secunde (min. secund.) u. ſ. w. wenn kleinere Winkel vorkämen. So kann man die Winkel durch dieſe Theile, die man mit o, I, II, bezeichnet ausdrücken. So iſt R = 90°; $\frac{1}{2}$ R = 45°; $\frac{2}{3}$ R = 60°. Es ſey im 5 Zuſ.

B = 50° 12′ 17″
179 59 60 = B + A + ACB
129° 47′ 43″ = A + ACB
64° 53′ 51″ $\frac{1}{2}$ = A = ACB.

6. Zuſ.

6. Zuſ. Wenn man in jeder Figur 52 F. ABCDEF, die Summe aller Winkel zu finden verlangte; ſo ziehe man aus einem willkührlichen Puncte innerhalb der Figur N; nach allen Winkeln der Figur Linien. Dadurch bekömmt man ſo viel Dreyecke als die Figur Seiten hat. Von jedem Dreyecke liegen zweene Winkel an deſſen Grundlinie, an einer Seite des Vielecks z. E. NAB, ABN, im △ABN; und machen alſo Theile der Winkel des Vielecks aus, wie hier Theile von BAF, ABC; der dritte Winkel jedes Dreyecks liegt an ſeiner Spitze und gehört nicht zu den Winkeln des Vielecks, wie hier ANB. Nun machen in jedem Dreyecke alle drey Winkel zuſammen 2 R, (13 S.) und in allen Dreyecken machen die Winkel ringsum die Spitzen N, zuſammen, 4 R (8. S. 2. Z.). Es ſey alſo die Zahl der Seiten = n: ſo iſt die Summe der Winkel des Vielecks n. 2 R — 4 R = (n — 2). 2 R.

7. Zuſ. In einem ordentlichen Vielecke (18. Erkl.) iſt der Vielecks winkel (angulus polygoni) $\frac{n-2}{n}$ 2 R. Exempel ſind das Dreyeck (4. Zuſ.) und das Viereck (12. S. 9. Z.).

Anm. Dieſer Zuſ. ſetzt zum voraus, daß die Winkel der Figur alle auswärtsgehende (*angles saillants*) ſind, die nehmlich ſo beſchaffen ſind, daß ſie gegen jeden Punct innerhalb der Figur wie N, weniger als 2 R betragen, oder daß, wenn man jedes Schenkel verlängert, die Verlängerung auſerhalb

des

des Umfangs der Figur geht, Winkel deren Schenkel verlängert in die Figur hineingehen, wie ABC, EFG; 53 F. heissen einwärtsgehende (*rentrans*). Wenn man ihre Grösse, nach dem, was von ihnen der innern Seite der Figur zugekehrt ist, schätzen will, so betragen sie über 2 R; und lassen sich nach der gegebenen allgemeinen Regel auch mit berechnen. Man kann aber von jedem Winkel wie ABC 53. F. das rechnen, was er weniger als 2 R beträgt; (angulum concavum) oder was er über 2 R beträgt und mit vorigen 4 R ausmacht: (angulum gibbum s. convexum). Jenes kömmt am gewöhnlichsten vor: zuweilen aber auch dieses.

14. Satz. Lehrsatz.

Parallelogrammen BD, BF, zwischen einerley Parallelen AF, BC, und über einer Grundlinie sind gleichen Innhalts 54. F.

Bew. Wenn E in der verlängerten Linie AD liegt, so müssen BE, CD, einander irgendwo in G zwischen den Parallelen schneiden. Nun ist AB = DC, BE = CF, und AD = BC = EF (17. Erkl.) also AE = DF: Folglich △ABE = △DCF (4. S.) und △ABE — △DEG = △DCF — △DEG d. i. ADGB = EGCF, endlich ADGB + △BGC = EGCF + △BGC; d. i. ADCB = EBCF.

Fiele E zwischen A und D (55. F.) so wäre EF = BC = AD (17. Erkl.) also AE = DF, und EB = FC; DC = AB (17. Erkl.) also △AEB = △DCF (4. S.) und zu jedem ~~EACB~~ addirt; ADCB = EFCB. Eben das gilt noch, wenn

wenn E in D fiele, da nur aus BEDC ein Dreyeck würde.

Man kann EF so weit man will auf der verlängerten AD hinaus nehmen: da werden BE, CF, immer länger und länger, und schliessen doch mit den beyden Seiten die gleich bleiben BC, EF, immer einerley Innhalt ein. Merkwürdig ist das, aber nicht unbegreiflich. Joh. Christoph Sturm de Matheseos incomprehensibilibus cap. 4. Sturmii Praelectiones Academicae ed. Algoewero 1722.

1. Zus. Zwey Parallelogramme, deren Grundlinien und Höhen gleich sind, sind auch gleichen Innhaltes. Die Höhe heisst nehmlich ein Perpendikel auf die Grundlinie von der gegenüberstehenden Seite; und so fallen die beyden Seiten, welche der gemeinschaftlichen Grundlinie gegenüber stehen, in eine Parallele (12. S. 5. Z.).

2. Zus. Dreyecke ACD, CDM, 56. F. sind gleichen Innhalts, wenn ihre Spitzen A, M, in einer Parallele AM, mit der gemeinschaftlichen Grundlinie liegen. Denn Parallelen DB, DE, mit CA, CM, geben Parallelogramme ABDC $= 2.\Delta ACD$; MEDC $= 2\,\Delta CMD$ (12. S. 6. Z.) und diese Parallelogrammen sind gleich (14. S.) Eben das gilt auch vermöge des 1. Zus. wenn der Dreyecke Höhen Aa; Mm; d. i. Perpendikel von den Spitzen auf die Grundlinie gleich sind.

Um-

Umgekehrt, wenn die Dreyecke CAD, CMD, über einer Grundlinie gleichen Innhalt haben, so ist AM mit CD parallel. Denn wo solches nicht ist, so sind AaM, mMA, nicht rechte Winkel (11. S.) und doch weil aA, mM, parallel sind (11. S.) aAM + mMA = 2 R (12. S.) also einer spitzig, der andere stumpf. Nun sey aAM stumpf und man ziehe durch A eine Parallele mit CD (11. S. 1. Z.) die also auf aA senkrecht stehet, und folglich unter AM fällt, und CM zwischen C und M schneidet. Es geschehe in O; so haben die Dreyecke COD, CAD einerley Innhalt, weil sie auf einer Grundlinie zwischen Parallelen AO, CD, stehen; folglich ist ΔCOD = ΔCOM welches ungereimt ist, weil jenes ein Theil von diesem ist. Es giebt also keine Parallele AO die von AM verschieden wäre, oder AM ist mit CD parallel.

3. Zus. Jedes Parallelogramm CBDA ist noch einmahl so groß als jedes Dreyeck CAD das mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat.

4. Zus. Ein Parallelogramm zu machen, das einem gegebenen Dreyecke ABC (57. F.) gleich ist, halbire man des Dreyecks Grundlinie BA in E; und ziehe durch E, C, Parallelen, in was für einen Winkel mit BC man will, bis an AFG die durch A mit BC parallel gehet, so ist FGCE = 2 ΔAEC (3. Zus.) und ΔAEC = ΔABE = $\frac{1}{2}$ ΔABC; also FGCE = ΔABC.

5. Zus.

Digitized by Google

5. Zuſ. Wenn man mit dem Verfahren des 4. Zuſ. den 10. Zuſ. des 12. S. verbindet, ſo kann man ein Dreyeck ABC, 58. F. in ein gleich groſſes Parallelogramm verwandeln, das einen gegebenen Winkel D, und eine gegebene Seite O hat. Man mache nähmlich im 4. Z. CEF = D, nehme CH = O und ziehe HI mit CG gleichlaufend; darnach IC verlängert bis ſie mit der verlängerten FE in K zuſammen ſtöſſt und durch K eine Parallele mit BECH gezogen, der GC, IH, in M, L, begegnen, giebt das Parallelogramm MCHL = ECGF = ΔBAC, wo CH = O; M = D.

6. Zuſ. Man kann jede geradelinichte Figur 59. F. in ein Parallelogramm verwandeln, das eine gegebene Seite und einen gegebenen Winkel hat. Denn man kann die Figur durch Diagonalen in Dreyecke AED, ADC, CAB, zertheilen und dieſes bey jedem einzelnen Dreyecke bewerkſtelligen; alle die einzelnen Parallelogramme aber laſſen ſich mit den gleichen Seiten zuſammen ſchieben, daß die ungleichen, wegen der gleichen Winkel alle in eine gerade Linie fallen, wie KECM; MCHL 58. Fig.

7. Zuſ. Jede Figur läſſt ſich in ein Rechteck verwandeln, deſſen eine Seite gegeben iſt.

15. Satz. Lehrſatz.

In einem rechtwinklichten Dreyecke BAC 60. F. iſt der Hypotenuſe BC, Quadrat BC MD ſo groß

groß als die Summe von der Seiten AB, AC, Quadraten ABRN + ACEH.

Bew. Man ziehe aus dem rechten Winkel ein Perpendikel auf die Hypotenuse, welches ihr Quadrat in zwey Rechtecke BGFD, CGFM theilet. Jedes ist der Seite, nach welcher es zu liegt, ihrem Quadrate gleich.

Denn man ziehe AD, CR, so ist $\Delta BAD = \frac{1}{2}$ BGFD und $\Delta RBC = \frac{1}{2}$ RNAB (14. S. 3. B.) aber RB = BA, BC = BD und RBC = Rect + ABC = ABC + Rect = ABD, also $\Delta RBC = \Delta BAD$ (2. S.) also RNAB = BGFD.

Vollkommen eben so $\Delta CEB = \frac{1}{2}$ CEHA; $\Delta CMA = \frac{1}{2}$ CGFM; und CE = CA; CB = CM; EAB = ACM; also $\Delta CMA = \Delta CEB$ und CGFM = CEHA.

Folglich ist die Summe der Rechtecke oder BCMD der Summe der Quadrate gleich; das ist BCq = ABq + ACq.

Anm. Der Satz heißt von seinem angeblichen Erfinder, einem Opfer das er soll gethan haben, und seiner Wichtigkeit: Theorema Pythagoricum, hecatombe dignum, Magister Matheseos.

1. Zus. Umgekehrt, wenn 61. F. BCq = ABq + ACq so ist BAC = R; denn man ziehe auf CA, das Perpendikel AD = AB; so ist CDq = CAq + ADq = CAq + BAq = CBq also CD = CB und $\Delta CAD = \Delta CAB$ (4. S.) und CAB = CAD = R.

Hie wird angenommen, daß CD = CB wenn jener Linie Quadrat, dieser ihrem Quadrate gleich ist.

Digitized by Google

ist, oder: daß ein paar Quadrate nicht gleich seyn können, ohne gleiche Seiten zu haben.

Man giebt dieses wohl ohne Schwürigkeit zu; Indessen kann es, zur völligen Deutlichkeit, folgendergestalt dargethan werden:

Wenn die Linie AB 60. F. kleiner ist als AC; so ist auch jener ihr Quadrat, kleiner als dieser ihres.

Denn man lege das Quadrat ABRN, folgendergestalt über ~~AcEH~~ ACEH: die Linie AB lege man daß sie von A gegen C zu auf AB liegt, und AN von A gegen H zu auf AH fällt. Das wird angehen, weil die rechten Winkel einander decken. So wird B zwischen A und C fallen, N zwischen A und H, NR wird mit AC parallel liegen, und kürzer seyn als die nur genannte Linie. Folglich fällt R zwischen AH und CE; und das Quadrat ABRN bedeckt nur einen Theil des Quadrates ~~ACEm~~. ACEA

Also haben ein paar ungleiche Linien, nicht gleiche Quadrate.

2. Zus. Ein Quadrat zu machen, das der Summe zweyer Quadrate gleich ist, setze man ihre Seiten rechtwinklicht zusammen, und ziehe die Hypotenuse, welche die Seite der Summe seyn wird. Will man aber eine Linie finden, deren Quadrat der Differenz zweyer Quadrate gleich ist, so richte man auf die Seite des kleinern CA, ein unbegränztes Perpendikel AB auf

Digitized by Google

und durchschneide solches mit des grössern Seite CB so ist CBq — CAq = ABq.

16. Satz.

Wenn eine Linie AB 62. F. einen Kreis in zween Puncten A, B, schneidet, so ist jeder Punct von ihr wie D der zwischen A und B fällt näher bey dem Mittelpuncte C als der Halbmesser beträgt, und jeder Punct auser A und B, wie E, weiter davon.

Bew. CAB = CBA (2. S. 3. Z.) aber CDB > A (9. S.) also CD < CB (9. S. 6. Z.); Und CEB < CBA (9. S.) < A; also CA < CE;

Zus. Eine gerade Linie schneidet einen Kreis entweder in zween Puncten; oder sie berührt ihn in einem, oder sie trifft gar nicht an seinem Umfang an, und alle ihre Puncte sind auser ihm (8. Grundsz. Zus.).

17. Satz.

I) Ein Perpendikel EF 63. F. aus eines Kreises Mittelpuncte E, auf die Sehne AB, halbirt sie in F; II) Eine Linie, die aus dem Mittelpunct E gezogen die Sehne halbirt, steht auf ihr senkrecht. III) Eine Linie, die durch das Mittel einer Sehne senkrecht auf sie gezogen wird, geht durch den Mittelpunct.

Bew. Weil EA = EB, so folgt I und II aus 9. S. 5. Z. und durch der Sehne AB Mit-

tel

tel F das nach I bestimmt worden, kann nur ein Perpendikel EF gehen (9. S. 4. Z.) also erhellet auch III.

1. Zus. Durch drey gegebene Puncte A, B, C, 64. F. einen Kreis zu beschreiben, ziehe man mitten durch die gegebenen Sehnen AB, BC, die Perpendikel MN, PQ, (6. S.). Weil der Mittelpunct in jedem liegt, so liegt er in ihrem einzigen Durchschnitte O, und der Halbmesser ist OA = OB = OC. Daß aber MN, PQ, irgendwo zusammenstossen werden, wenn A, B, C, nicht in einer geraden Linie liegen, erhellet so: Ein Loth von V auf AB gefällt ist mit MN gleichlaufend (11. S.). Sind nun BC, AB, nicht eine gerade Linie, so steht QP nicht auf AB senkrecht, weil es sonsten zwo Linien durch B gäbe, die beyde auf PQ senkrecht stünden, BC, und die verlängerte AB, wieder 9. S. 4. Z. also ist PQ von dem Lothe aus V auf AB unterschieden, folglich mit MN nicht gleichlaufend (12. S. 1. Z.).

2. Zus. Dieser Satz vom Zusammenstossen der Perpendikel gilt, wenn auch T, V, nicht mitten in AB, BC, liegen, weil der Beweis solches nirgends annimmt, das heisst: zwey Perpendikel auf zwo Linien, die weder eine ausmachen, noch gleichlaufend sind, stossen allemahl zusammen.

3. Zus. Aber wenn A, B, C, in einer Linie lägen, so wären MN, PQ gleichlaufend. Nähmlich

lich durch drey Puncte einer Linie geht kein Kreis (16. S. Zuſ.).

4. Zuſ. Drey Puncte beſtimmen einen einzigen Kreis, wie zweene eine gerade Linie; doch wird der Kreis zugleich der Gröſſe nach beſtimmt, die gerade Linie zuweilen nur der Lage nach. Die drey Puncte geben zugleich den Mittelpunct und den Halbmeſſer; und alſo können zweene verſchiedene Kreyſe, einander nicht in mehr als zween Puncten ſchneiden.

18. Satz. Lehrſatz.

I) Wenn die Sehnen NM, FG (65. F.) vom Mittelpuncte E gleich entfernt ſind, ſo ſind ſie gleich: II) Wenn ſie gleich ſind, ſo ſind ſie gleich entfernt. III) Die entferntere iſt kleiner IIII) die kleinere iſt entfernter.

Bew. Die Entfernungen EH, EO, halbiren die Sehnen (17. S.); alſo iſt $FH = \frac{1}{2}FG$; $MO = \frac{1}{2}MN$: Weil nun $EF = EN$, ſo iſt

I) $FEq - EHq = EMq - EOq$ oder (15. S.) $FHq = MOq$ alſo $FH = MO$, $FG = MN$.

II) $FEq - FHq = EMq - MOq$ oder $EHq = EOq$;

III) Wenn $EO > EH$, ſo iſt $EMq - EOq < EFq - EHq$ oder $MO < FH$;

IIII) Wenn $MO < FH$ ſo iſt $MEq - MOq > EFq - FHq$ oder $EO > EH$.

19.

Digitized by Google

19. Satz. Lehrsatz.

Ein Perpendikel FD, auf den Halbmesser BA durch sein Ende A hat alle seine übrigen Puncte auserhalb dem Kreise; Jede andere Linie durch A aber schneidet den Kreis in zween Puncten 66. F.

Bew. Man nehme F nach Gefallen in AD, so ist BFA < BAF (9. S. 3. Z.) also BF > BA (9. S. 6. Z.) > BG (13. Erkl.).

Weil AL schiefe Winkel mit BA macht (9. S. 4. Z.) und es doch auf sie aus B ein Perpendikel giebt (7. S.) so sey solches BE so ist BAE < BEA (9. S. 3. Z.) also BE < BA (9. S. 6. Z.) < BI (13. Erkl.) also ist ein Punct von AL, nähmlich E innerhalb des Kreises und AL schneidet den Kreis noch einmahl, (8. Grundf. Zus) man nehme auf ihr EM = EA, so ist ΔBEM = ΔBEA (2. S.) also BM = BA; und M der zweyte Durchschnittspunct (13. Erkl.) auser dem und A es keinen giebt (16. S. Zus.) daß also das Stück AEM ganz innerhalb des Kreises fällt.

1. Zus. Ein Perpendikel durch des Halbmessers Ende ist eine Tangente (13. Erkl.) daß man also durch jeden Punct im Umfange des Kreises A eine Tangente zieht, wenn man dahin einen Halbmesser BA zieht und auf solchen durch A ein Perpendikel FD setzet.

Digitized by Google

2. Zuſ. Durch ein A, geht nur eine Tangente (20. S.) und ſteht jede Tangente auf den Halbmeſſer am Berührungspuncte ſenkrecht.

3. Zuſ. Ein Perpendikel auf die Tangente durch den Berührungspunct, geht durch den Mittelpunct, (2 Zuſ. und 9. S. 4. Z.).

4. Zuſ. Sehnen, die man mit der Tangente FD gleichlaufend, alſo auf BA ſenkrecht zöge, würden immer kleiner und kleiner werden, je näher ſie von B nach A rückten (18. S.) das iſt, ihre Durchſchnitte mit dem Kreiſe würden immer näher und näher zuſammen rücken und endlich in A in einen Punct zuſammengehen. Alſo kann man die Tangente als die letzte dieſer Sehnen, und den Berührungspunct, als zweene zuſammengegangene Durchſchnittspuncte anſehen. In ſo fern ſteht auch die Tangente unter dem 16. Satze, daß jede Linie, die nicht völlig auſerhalb des Kreiſes fällt, zweene Puncte mit ihm gemein hat.

5. Zuſ. Wenn man aus einem gegebenen Punete K 67. F. eine Tangente an den Kreis ziehen wollte, ſo lieſſe ſich die Art ſolches zu bewerkſtelligen folgendermaaſſen analytiſch finden: die Tangente, die man ſucht, ſey KM; ſo iſt BMK = R (2. Z.). Man ziehe an A die Tangente AD der BM verlängert in D begegne; ſo haben die Dreyecke ABD, MBK, den Winkel B gemein, BAD = BMK, und BA = BM; ſind folglich gleich (3. S.) alſo BK = BD;

Hier-

Hieraus fliesst folgende Auflösung: durch K und den Mittelpunct ziehe man KB; an A wo sie in den Kreis schneidet, eine Tangente, die man mit BD = KB durchschneide; So kann man DB ziehen, welche den Kreis in dem gesuchten Berührungspuncte M schneiden, und KM die Tangente seyn wird. Man kann auch Ad = AD nehmen, und also eine zweyte Tangente Km ziehen.

6. Zus. Alle Puncte des Bogens AIM, 66. F. A und M ausgenommen, fallen zwischen AL und AD (19. S. und 17. S.) man kann also sagen, der Winkel, den der Bogen MIA mit der Tangente macht, sey kleiner als jeder geradelinichte Winkel LAD; und der Winkel des Bogens MIA mit dem Halbmesser BA sey grösser als jeder geradelinichte spitzige Winkel LAB; nähmlich LAB kann einem rechten so nahe kommen, und LAD so klein werden als man nur will, und der Bogen fällt doch allemahl ganz zwischen LA und AD.

20. Satz.

Kreise, die aus einem Mittelpuncte K 68. F. mit verschiedenen Halbmessern KP; KQ, beschrieben sind, concentrische Kreise, haben keinen Punct mit einander gemein.

Bew. Denn jeder Punct des einen ist von K um die Länge KP; und jeder Punct des andern um die Länge KQ entfernt. Hätten sie einen

Digitized by Google

Punct gemein, so wäre dieses ein Punct beyder Kreise, der nicht zugleich zwo verschiedene Entfernungen von einerley Puncte K haben kann.

1. Zus. Kreise, die einander schneiden, das ist, zweene Puncte, und nicht mehr (17. S. 4. Z.) gemein haben, haben nicht einerley Mittelpunct; aber eine gemeinschaftliche Sehne durch die Durchschnittspuncte; wie LM, 27. F. und wenn man durch das Mittel dieser Sehne ein Perpendikel auf sie setzt, geht solches durch beyder Kreise Mittelpuncte (17. S.) die Mittelpuncte können aber auf verschiedenen Seiten der Sehne liegen wie 27. F. oder auf einer wie 69. F. Im letzten Falle sey LH des Kreises um A, und LI des Kreises um P Tangente; die letztere muß wegen des stumpfen Winkels HLP, und des spitzigen PLO, zwischen LH und LM fallen; (19. S.) und ihres Kreises Bogen LNM fällt also bey L zwischen sie und LM folglich zwischen LM und den Bogen LKM des andern Kreises, weil LKM zwischen LH und LI fällt (19. S.). Eben so erhellet, daß bey M der Bogen MNL zwischen LM und den Bogen MKL fallen muß. Und also liegt (vermöge 17. S. 4. Z.) der ganze Bogen LNM zwischen LM und dem Bogen LKM, aber wenn Ak = AL; Pn = PL der ganze Bogen LkM zwischen LM und dem Bogen LnM; Nun ist PL > AL (9. S. 12. Z.) von den Bogen also, die auf der Seite der gemeinschaftlichen Sehne liegen, auf der die Mittel-

telpuncte nicht liegen, erhebt sich des grössten Kreises Bogen am wenigsten über die Sehne, oder er ist flächer.

2. Zus. Aus jedem Puncte P des Perpendikels KOn lässt sich ein Kreis durch L und M beschreiben; weil allemahl PL = PM (2. S.). Und auser den Puncten L, M, kann noch nach Gefallen einer N in den Perpendikel gegeben seyn; weil dieses schon durch die Mittelpuncte aller Kreise durch L und M, gehet, und also der Punct N nur die Lage des Mittelpunctes im Perpendikel nach (17. S. 1. Z.) bestimmt. Da man also N so nahe man will bey LM nehmen kann, so lassen sich Kreise beschreiben, deren Bogen LNM sich immer weniger und weniger über LM erheben, immer flächer und flächer werden; oder der Sehne immer näher und näher kommen. Weil dieses ohne Ende fortgehet, und immer grössere Halbmesser erfodert (1. Zus.) so kann man sagen, der letzte unter ihnen, für einen unendlichen Halbmesser, der nehmlich grösser ist als jede gegebene Länge, sey die Sehne LM selbst. Und so lässt sich jede bestimmte gerade Linie, als ein Bogen eines Kreises betrachten, dessen Halbmesser unendlich wäre.

3. Zus. Um den Mittelpunct F, 70. Fig. sey mit FG ein Kreis beschrieben dessen Durchmesser GP ist. Man nehme einen Punct Q auserhalb der Linie GF und beschreibe darum einen Kreis mit QG; dieser wird den vorigen noch an-

Digitized by Google

derswo als in G schneiden. Denn man lege ein Dreyeck FQg das Qg = QG; Fg = FG hat unter FQ, welches offenbahr wie im 4. S. angeht. So ist g in einem Kreise um Q mit QG, und in einem um F mit FG; also beyder genannten Kreise zweyter Durchschnitt. Sollen also ein Paar Kreise nur einen Punct G mit einander gemein haben, einander nicht schneiden, sondern nur berühren, so müssen ihre Mittelpuncte F, f, mit G in einer geraden Linie liegen.

4. Zus. Wenn man durch einen gegebenen Punct G, zweene Kreise beschreiben soll die nur ihn gemein haben, so nehme man F, f, für ihre Mittelpuncte wie man will an, nur daß durch alle drey Puncte eine gerade Linie geht, Kreise um F, f, mit FG, fG, werden das verlangte thun.

Denn ein Perpendikel MN durch G auf die gerade Linie durch F, f, G, berührt beyde Kreise (19. S. 3. Z.) Liegen nun F, f, auf verschiedenen Seiten von G, oder von MN 71. F. so haben die Kreise keinen Punct als G gemein weil jeder ganz auf seiner Seite der Tangente liegt. Befinden sich aber F, f, auf einer Seite von G 70. F. so sey Gf > GF; und K im Kreise um f, man ziehe fK, FK, KG, so ist fKG = fGK (2. S. 3. Zus.) und weil F zwischen f und G fällt, FKG < fKG also < fGK also FK > FG (9. S. 6. Z.) oder von dem Kreise um f ist jeder andere Punct als G, auser dem um F.

5.

Digitized by Google

5. Zuſ. Kreiſe die einander berühren, haben an einer gemeinſchaftlichen Tangente einen gemeinſchaftlichen Berührungspunct, und Kreiſe die dergleichen haben berühren einander, weil ihre Mittelpuncte in dem Perpendikel auf die Tangente durch den Berührungspunct liegen (19. S. 3. Z.) Zweene Kreiſe, die durch einen Punct gehen, aber daſelbſt nicht einerley Tangente haben, ſchneiden einander auſer dieſem Puncte noch anderswo aus dem 3. Zuſ. denn jedes Mittelpunct liegt in einem Perpendikel auf ſeine Tangente durch den gemeinſchaftlichen Punct, und dieſe Perpendikel müſſen verſchieden ſeyn, alſo können nicht beyde Mittelpuncte mit dem gemeinſchaftlichen Puncte in einer geraden Linie liegen.

6. Zuſ. Wenn ein Kreis um F, 70. F. GM zur Tangente hat, und man in der verlängerten Gf, f, weiter als F von G nimmt, ſo geht der Kreis mit fG, zwiſchen vorigen und der gemeinſchaftlichen Tangente hin (4. Zuſ.) der Winkel eines Kreiſes mit ſeiner Tangente, (19. S. 6. Z.) wird alſo kleiner, wenn der Halbmeſſer gröſſer wird. Dieſer Berührungswinkel der kleiner als jeder geradelinichte iſt, kann alſo nicht völlig Nichts ſeyn, wie Peletarius glaubte, ſonſt wäre unbegreiflich, wie er bey dem Kreiſe um f, kleiner ſeyn könnte als bey den um F. S. Clavii Eucl. L. III. ſchol. prop. 16. Walliſium de angulo contactus, Op. T. II. p. 605.

7. Zuſ.

Digitized by Google

7. Zuſ. Der gröſſere Kreis entfernt ſich alſo langſamer von ſeiner Tangente, als der kleinere, daher kann man ſagen er habe weniger Krümmung womit auch der 1. Zuſ. übereinſtimmt.

8. Zuſ. Man ſchiebe in der 69. F. des kleinern Kreiſes Mittelpunct A, auf dem Perpendikel Nn, nach P zu, ſo werden ſeine beyden Durchſchnitte mit dem gröſſern L, M, immer näher und näher zuſammen rücken, und endlich in N in einen Punct fallen, in welchem nun beyde Kreiſe einander berühren. Der Berührungspunct zweener Kreiſe iſt alſo als die Vereinigung zweener Durchſchnittspuncte anzuſehen und ſo iſt der Satz: Zweene Kreiſe berühren einander nur in einem Puncte, ein beſonderer Fall deſſen: Sie ſchneiden einander nur in zween Puncten. Eben wie 19. S. 4. Z.

21. Satz. Lehrſatz.

Der Winkel am Mittelpuncte eines Kreiſes BDC 72. 73. 74. F. iſt noch einmahl ſo groß als der Winkel am Umfange BAC.

Bew. I. Fall 72. F. BDC = A + C (13. S. 1. Z.) = 2 A (2. S. 3. Z.).

II. 74. F. EDC = 2. EAC; EDB = 2. EAB alſo CDE + EDB = 2. (EAC + FAB) oder CDB = 2. CAB.

III. 73. F. EDC = 2. EAC; EDB = 2. EAB; alſo EDC − EDB = 2. (EAC − EAB) oder BDC = 2. EAB.

Digitized by Google

1. Zus. Der Winkel im halben Kreise KPL 75. F. ist ein rechter. Denn man ziehe PFG so ist PGL = ½ GFL und GPK = ½ GFK; also GPL + GPK = ½. (GFL + GFK) = ½. 2 R (8. S.).

2. Zus. Der Winkel MPL im kleinern Abschnitte, ist stumpf, und NPL im grossen spitzig. Man ziehe durch L den Halbmesser LK, so ist KPL = R also MPL > R; NPL < R.

3. Zus. Winkel an verschiedenen Puncten eines Abschnittes sind gleich. Denn sie gehören zu einerley Winkel am Mittelpuncte.

22. Satz. Lehrsatz.

I. Wenn in einem Kreise 65. F. die Winkel am Mittelpuncte NEM = FEG so sind die Bogen NLM, FIG zwischen ihren Schenkeln gleich und umgekehrt, II) wenn die Bogen gleich sind, sind auch die Winkel gleich.

Bew. I. Die Gleichheit der Winkel giebt NM = FG (2. S.). Man lege also die Sehne NM mit ihrem Bogen NLM so auf die Sehne FG, daß N auf F; M auf G fällt; so muß jeder Punct des Bogens NLM auf einen Punct des Bogens FIG fallen; weil beyder Bogen Puncte von E gleich weit abstehen: Also decken beyde Bogen einander.

II. Sind aber die Bogen NLM = GIF; und ihre Sehnen nicht gleich, so ziehe man aus N die Sehne NQ = GF (indem man aus N

mit

Digitized by Google

mit dem Halbmesser = GF einen Kreis beschreibet, der den vorgegebenen nothwendig schneidet. Nun mag der Bogen NLQ grösser oder kleiner als NLM seyn, so finden allemahl folgende Schlüsse statt: Man kann NQ vermöge I auf GF legen, daß beyde Sehnen, und die Bogen NLQ, GIF einander decken; und weil QM mit NLQ zu einem Kreise gehört, so müssen alle Puncte von QM auf Puncte des Bogens, den NLM deckt, oder auf die Verlängerung dieses Bogens von F nach V zu fallen (17. S. 1. Z.) nachdem nähmlich NLQ grösser, oder kleiner als NQM wäre. Folglich deckt entweder der ganze Bogen NLM einen Theil von GIF, oder ein Theil von NLM den ganzen GIF welches beydes der angenommenen Gleichheit wiederspricht. Also kann Q von M nicht unterschieden seyn, und es ist NM = GF folglich NEM = GEF (4. S.).

1. Zus. Gleiche Sehnen eines Kreises haben gleiche Bogen; und gleiche Bogen gleiche Sehnen. Dieses giebt, wenn NM = FG; so wohl, NLM = GIF als derselben Ergänzungen zu einerley Umfange NIM = FLG, alles dieses gilt auch bey zween Kreisen, deren Halbmesser gleich sind.

2. Zus. Das Perpendikel EF, 63. F. 17. S. halbirt auch den Bogen AIB in I;

3. Zus. Wenn die beyden Winkel FKD; Fig. 76. GKD; eine Rationalverhältniß haben, so drucke man solche (Ar. V. 24.) durch die Verhältniß der

der zwo ganzen Zahlen p: q aus. Es muß also einen kleinen Winkel wie EKD geben, der p mahl in dem einen, q mahl in dem andern enthalten ist. Zwischen des Winkels EKD Schenkel fällt der Bogen DE, und dieser muß auch p mahl in DF: q mahl in DG enthalten seyn; Folglich ist DF: DG oder p. DE: q. DE = p: q = FKD: GKD; oder die Bogen welche zwischen der Winkel Schenkel fallen; ihnen zugehören, verhalten sich wie die Winkel.

Umgekehrt, wenn die Bogen DF: DG in der Rationalverhältniß p: q sind; so muß ein kleiner Bogen DE; p mahl in dem einen, q mahl im andern enthalten seyn. Diesem kleinen Bogen gehört der Winkel EKD zu, und so viel Bogen = DE auf DF oder DG gehen, so viel Winkel = EKD gehen auf den Winkel FKD oder GKD; also ist FKD: GKD oder p. EKD: q. EKD = p: q oder die Winkel verhalten sich wie die ihnen zugehörigen Bogen.

Wenn also die Winkel, oder die Bogen eine Rationalverhältniß haben, so verhalten sich allemahl die Winkel wie die Bogen.

4. Zus. Es sey LKD = R = LKH: so sind die Bogen LD = LH (22. S.) also jeder die Hälfte des halben Umkreises DGH oder ein Viertheil des ganzen DGID; daher man diese Bogen Quadranten nennt. Es verhält sich wieder der Quadrant zum Umkreise wie der rechte Winkel zur Summe aller rings um den Punct

Digitized by Google

K (8. S. 2. Z.) und eben so ist FKD: 4 R = DF: DFGHID.

5. Zus. Wird der Quadrant DL in 90. Theile getheilet, von denen einer DE seyn mag; daß also der ganze Umfang 360. solcher Theile bekömmt; so kann man die Winkel, die sich durch EKD messen lassen, durch die Bogen, die zwischen ihre Schenkel fallen, bestimmen. Wenn z. E. DF solcher Theile 50 hielte, so bestünde FKD aus 50 solchen Winkeln, dergleichen 90 einen rechten ausmachen, und 360. den Raum um K ringsherum ausfüllen. Es ist also gleichviel, ob man den Winkel EKD nach 13. S. Anm. einen Grad nennen will, oder ob man ED = $\frac{1}{360}$. DGHID einen Grad heisst, da alsdenn EKD ein Winkel ist, der dem Bogen von einem Grade zugehört. Die Benennung der Grade wird nähmlich eigentlich den Theilen des Kreises beygelegt. Man kann sie aber auch auf diese Art von Winkeln gebrauchen. FKD = 50° heisst so viel als FKD = 50. EKD wenn ED = 1°.

6. Zus. Alle diese Schlüsse setzen keine gewisse Grösse des Halbmessers KD zum voraus; wird also um K ein anderer Kreis beschrieben, so ist auf eben die Art df: dghid = fKd: 4 R; aber fKd = FKD; also ist df: dghid = DF: DGHID oder Bogen, die mit verschiedenen Halbmessern aus der Spitze eines Winkels beschrieben sind, haben einerley Verhältniß zu ih-

ren

Digitized by Google

ten Umkreisen, oder sie sind ähnlich (nähmlich ähnliche Theile ihrer Umkreise) theilet man also jeden Umkreis in 360° ein, die freylich bey den kleinern kleiner werden; so bekömmt DF soviel Grade als df; und die Grösse des Winkels FKD wird durch einerley Anzahl von Graden ausgedruckt, man mag die zählen, welche auf DF, oder die, welche auf df gehen. Ja wenn man gKd durch Grade des Bogens gd, und FKD durch Grade des Bogens FD ausdruckte, so würden die Mengen beyder Grade sich eben so verhalten, als ob man auch für GKD die Grade in GD oder auch für FKD die Grade in fd gezählet hätte, weil GD so viel Grade hat als gd, und fd so viel als FD:

7. Zus. Auf diesen Betrachtungen beruhet die gewöhnliche Art Winkel zu messen. Man legt an ihre Spitze einen Kreis, der in Grade getheilet ist, und zählet wieviel zwischen die Schenkel fallen. Der Halbmesser ist willkührlich (6. Z.). Und so heisst ein Bogen wie FD, das Maaß des Winkels FKD, weil der Bogen, oder eigentlich, die Menge von Graden die auf ihn gehen, sich verhält, wie die Menge von Winkeln EKD die auf FKD gehen, d. i. wie der Winkel FKD. Dieses ist also ein Fall, da das Maaß einer Sache nicht mit ihr von einerley Art ist, und nicht in ihr enthalten seyn kann; aber ihr proportionirt ist; Eben so pflegt

Digitized by Google

man Wege durch Zeit zu messen, und in andern Fällen zu verfahren.

8. Zus. Das Maaß eines Winkels am Umkreise NPL; MPL; 75. F. (22. S.) ist die Hälfte des Bogens NL; ML auf dem er stehet. Und wenn zweene Winkel wie MPL und O auf Bogen stehen, die zusammen den Umkreis ausmachen, so machen ihre Maasse zusammen den halben Umkreis, also ist P + O = 2 R.

9. Zus. Jedes in einem Kreise beschriebene Viereck PMOL hat die Eigenschaft, daß seine gegenüberstehende Winkel MPL + LOM = PLO + OMP = 2 R.

10. Zus. Läßt sich ein Winkel nicht durch Grade messen, so kann man Minuten, Secunden u. s. f. (13. S. Anm.) dazu nehmen.

11. Zus. Vom 3. Zus. an bis hieher wurden Rationalverhältnisse zum voraus gesetzt. Also ist noch nöthig zu zeigen was wahr bleibt, wenn die Bogen GD: FD und folglich die Winkel (3. Zus.) oder die Winkel GKD, FKD; und folglich die Bogen eine Irrationalverhältniß hätten.

Man nehme an die Bogen GD: FD haben eine Irrationalverhältniß: So lassen sich beyde nicht mit einerley kleinem Bogen ausmessen. Aber für einen von beyden z. E. FD kann man gar leicht einen kleinen Bogen der ihn misst, durch fortgesetzte Halbirungen finden (2. Zus.). Es sey z. E. FD = 32. ED wo 32 = 2. 2. 2. 2.

Digitized by Google

2. 2, oder wo man in FD fünfmahl halbirt hat, auf ED zu kommen. So wird FD genau von ED gemessen, aber GD nicht. Es sey z. E. GD > 50. ED aber < 51. ED. Nun halbire man ED und heisse die Hälfte f; also ED = 2 f so ist FD = 64. f aber GD wird nicht nur zwischen 50. 2. f und 51. 2. f oder zwischen 100 f und 102 f fallen, sondern es muß nothwendig entweder zwischen 100 f und 101 f oder zwischen 101 f und 102 f fallen. Wie es also vorhin zwischen Gränzen eingeschränkt wurde die um ED unterschieden waren, so ist es nun zwischen Gränzen eingeschränkt, die nur um f = $\frac{1}{2}$ ED unterschieden sind. Nimmt man ferner g = $\frac{1}{2}$ f = $\frac{1}{4}$ ED so ist FD = 128 g. Gesetzt GD sey vorhin zwischen 101 f und 102 f gefallen, so fällt es jetzo nicht nur zwischen 202 g und 204 g sondern entweder zwischen 202 g und 203 g oder zwischen 203 g und 204 g und ist also zwischen Gränzen eingeschränkt die nur um g = 1 ED unterschieden sind. So kann man es durch die Halbirung von g, in Gränzen einschränken die nur um $\frac{1}{8}$ ED unterschieden sind; oder so immer zwischen engere und engere Gränzen, deren Unterschied kleiner als jede gegebene Grösse werden kann, fallen. Die Verhältniß DF: DG läßt sich also auch immer mit einer kleinern und kleinern Ungewißheit ausdrücken. Sie wäre z. E. hie I) 32: 51 oder 52; II) 64: 101 oder 102; III) 128: 202 oder 203 u. s. w.

So lassen sich also Rationalverhältnisse angeben die der Irrationalverhältniß DF: DG so nahe als man will kommen.

Wenn man EKD, FKD, GKD, in den bisherigen Schlüssen statt ED, FD, GD, setzt, so wird man vollkommen auf eben die Art einsehen, daß sich Rationalverhältnisse finden lassen, die der Irrationalverhältniß FKD: GKD so nahe als man will kommen.

Schon hieraus läßt sich schliessen, daß die Irrationalverhältnisse FKD: GKD und FD: GD gleich seyn müssen. Denn man nähert sich beyden durch immer gleiche Rationalverhältnisse, und man kann diese Näherung so weit treiben als man will. Man kann also jede als die letzte von allen den Rationalverhältnissen ansehen, durch die man sich ihr nähert, und wenn alle die Rationalverhältnisse gleich sind, werden die letzten auch gleich seyn.

Diese Schlüsse kurz und überzeugend zu übersehen, kann man sie so vortragen: Man nenne die

Winkel GKD $= \alpha$; FKD $= \varepsilon$; EKD $= \varkappa$
Bogen GD $= a$, FD $= e$; ED $= k$

Ferner setze man $e = nk$ also $\varepsilon = n\varkappa$, wo n eine ganze Zahl bedeutet, die so groß als man will, folglich $\frac{1}{n}$ so klein als man will werden kann.

Nun

Nun bedeute m eine andere ganze Zahl, so ist wegen der Irrationalverhältniß nicht $a = mk$, sondern gröſſer oder kleiner; Ferner wird aus dem vorigen erhellen, daß man annehmen kann $a > mk$ und $a < (m+1)k$; daraus folgt denn $\alpha > m\varkappa$ und $\alpha < (m+1)\varkappa$ Also ist $\frac{a}{e} > \frac{m}{n}$ und $< \frac{m+1}{n}$; Eben so $\frac{\alpha}{\varepsilon} > \frac{m}{n}$ und $< \frac{m+1}{n}$ Sind also a: e und α: ε nicht gleich, so sey z. E. die erste gröſſer. Man setze also $\frac{a}{e} = \frac{m}{n} + x$ und $\frac{\alpha}{\varepsilon} = \frac{m}{n} + y$ so ist $x > y$, jedes aber $< \frac{1}{n}$. Ferner $\frac{a}{e} - \frac{\alpha}{\varepsilon} = x - y$. Sollen nun beyde Verhältnisse, a: e; α: ε, nicht gleich seyn, so können auch die beyden Quotienten $\frac{a}{e}$; $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ nicht gleich seyn, sondern ihr Unterschied $x - y$ muß eine gewisse Gröſſe haben die sich selbst angeben läßt, oder doch gröſſer ist, als eine gewisse Gröſſe die sich angeben läßt. Er ist aber gewiß kleiner als $\frac{1}{n}$; und $\frac{1}{n}$ kann so klein werden als man will, so daß sich keine Gröſſe angeben

lässt, bis auf die, und nicht weiter $\frac{1}{n}$ abnehmen könnte. Also kann $x - y$ so klein werden als man will, und folglich keine Grösse wie vorhin beschrieben ward haben. Folglich können die Quotienten, und die Verhältnisse, keinen Unterschied haben, der sich angeben liesse. Grössen aber, zwischen denen man keinen Unterschied angeben kann, können nicht anders, als für gleich angesehen werden. Die Verhältnisse der Winkel und der Bogen müssen also gleich seyn. Und daher verhalten sich die Winkel wie die Bogen, die Verhältniß mag rational oder irrational seyn.

12. Zus. Wenn n ohne Ende wächst, so nimmt k ohne Ende ab und es giebt bey keinem von beyden ein Letztes, weil diese Veränderung ohne Ende fortgeht. Wenn man sich aber ein letztes k einbildet, so muß man solches kleiner als jede Grösse die sich angeben lässt, unendlich klein annehmen. Man heisst es das Element der Bogen e; a; und das ihm zugehörige $\varkappa$ das Element der Winkel ε; α; und sieht diese Elemente an als würden von ihnen die Bögen und Winkel völlig genau gemessen; weil der Fehler nicht ganz ein Element betragen kann. Diese Redensarten sind also blos Abkürzungen des bisherigen weitläuftigen Vortrags.

23. Satz.

23. Satz. Aufgabe.

Ein Kreis 77. F. sey in lauter gleiche Bogen AB = BC u. s. f. an der Zahl n getheilet, man verlangt die Winkel E, D, C, u. s. f. zu wissen, welche die Sehnen mit einander machen.

Aufl. Weil die Bogen $EF = ED = \frac{1}{n} \cdot 360^0$; so steht der Winkel E auf dem Bogen FABCD auf, der in Graden $= 360 - \frac{2.360}{n}$ ist; Also ist der Winkel $E = 180^0 - \frac{360^0}{n}$ (22. S. 8. Z.). Da nun auch die Bogen EF = FA und ED = DC u. s. f. so sind der Sehnen Winkel an der Peripherie alle gleich, und also = E.

1. Zus. Die Sehnen selbst aber sind auch gleich, (22. S. 1. Z.) wenn man also eines Kreises Umfang in n gleiche Theile theilen kann, so kann man dadurch in ihm ein ordentliches Vieleck von n Seiten oder Winkeln beschreiben (18. 20. Erkl.). Dessen Polygonwinkel hie eben so wie 13. S. 7. Z. gefunden wird.

2. Zus. Die Halbmesser theilen das reguläre Polygon, das in den Kreis beschrieben ist, in lauter gleiche Dreyecke, AKB, BKC, CKD, u. s. f. (4. S.).

3. Zus. Der Winkel am Mittelpuncte, angulus centri; AKB = BKC, ist $= \frac{1}{n} . 360°$.

Anm. Eine Tafel für die Polygon- und Centriwinkel, lässt sich also leicht verfertigen, wenn man nach und nach n = 3; = 4; = 5, u. s. f. setzt. Sie hat in der ausübenden Geometrie und in der Befestigungskunst vielen Nutzen.

4. Zus. Wenn ABCDEF ein ordentliches Vieleck ist, so lässt sich ein Kreis durch alle Spitzen seiner Polygonwinkel beschreiben. Denn man halbire zweene Polygonwinkel FAB, CBA; weil jeder Polygonwinkel $< 2R$ so ist jedes Hälfte $< R$ also beyder Summe $< 2R$ also stossen die halbirende Linien irgendwo in K zusammen, daß AK = BK (3. S. 2. Z.). Nun ziehe man KC, so ist $\triangle KBC = \triangle KBA$ (2. S.) und KC = KA, KCB = KBC = dem halben Polygonwinkel; und so ist ferner von K nach allen Ecken des Polygons gleich weit.

5. Zus. Wenn AB = BK = BA; so ist $AKB = \frac{2}{3} R$ (13. S. 4. Z.) oder der Bogen AB = 60°; also $= \frac{1}{6} . 360°$. Der Halbmesser ist also die Sehne des sechsten Theiles vom Umkreise.

6. Zus. In einen gegebenen Kreis ein ordentliches Sechseck zu beschreiben, darf man nur darinnen den Halbmesser sechsmahl herumtragen.

7. Zus.

Digitized by Google

7. Zuſ. Auf eine gegebene Linie DC ein Sechseck zu beſchreiben, darf man nur über ihr ein gleichſeitiges Dreyeck DKC beſchreiben, dieſes giebt K, und den Kreis um K mit KD, und das Sechseck (6. Zuſ.).

8. Zuſ. Ueber jeder gegebenen Linie DC ein ordentliches Vieleck zu beſchreiben, trage man an DC in D und C die halben Polygonwinkel, ſo giebt ſich die Spitze K des gleichſchenklichten Dreyecks, und der Kreis, der nach 4. Z. um das Polygon gehet, in dem man alſo nur die Sehne DC herumtragen darf.

Anm. Dieſes Verfahren giebt bey groſſen Kreiſen und vielſeitigen Vielecken ziemliche Fehler, wenn man ſich dabey des gewöhnlichen Transporteurs bedienet, ob es gleich der Theorie nach vollkommen richtig iſt. Im kleinen aber dient es, ſich Begriffe von den Polygonen zu machen, und bahnet uns den Weg zu Vorſchriften, die eine richtigere Ausübung geben, aber ſich erſt in der Trigonometrie erklären laſſen. Sonſt findet man aus einem gegebenen Polygone, das welches noch einmahl, und das welches halb ſoviel Seiten hat, durch die Halbirung und Verdoppelung des Bogens. Z. E. aus dem Sechsecke das Zwölfeck und Dreyeck.

9. Zuſ. Die Zahl der Seiten ſey gerade; oder $n = 2m$ ſo iſt der Centriwinkel (3. Z.) $= \frac{360}{2m} = \frac{180}{m}$; alſo machen m Centriwinkel; **180° oder das Polygon wird durch Durchmeſſer, die zugleich Diagonalen ſind, in ähnliche Hälften getheilet.**

10. Zus. Alle Höhen der Dreyecke, in welche das Vieleck aus dem Mittelpuncte getheilet wird, wie KQ ist, sind gleich (18. S.). Man richte also auf einer unbestimmten geraden Linie 77. F. das Perpendikel ak = KQ auf, und mache ab = bc = cd = de = ef = fg, jede einer Seite des Vielecks gleich, so haben die Dreyecke akb; bkc; ckd; u. s. w. alle einerley Innhalt (14. S. 1. Z.) jedes ist nehmlich dem Dreyecke AKB gleich; und also ist die Summe aller Dreyecke wie AKB, das ist das Vieleck, so groß
77* als die Summe aller Dreyecke der 94. F. d. i. als Δakg; oder als ein Dreyeck, dessen Höhe = KQ, und dessen Grundlinie der Umfang des Vielecks ist.

24. Satz. Lehrsatz.

Dreyecke von gleicher Höhe BAC, CED 78. F. verhalten sich wie ihre Grundlinien BC, CD;

Bew. Es sey Bb = Dd eine Länge, mit der sich BC und CD genau messen lassen; Also daß BC = m. Bb; CD = n. Dd wo m, n, ganze Zahlen bedeuten. Nun ist ΔABb = ΔDEd, (14. S. 2. Z.) und aus eben dem Grunde ΔBAC = m. ΔABb; ΔCED = n. ΔDEd; also ΔBAC: ΔCED = m: n. = BC: CD:

Man sieht leicht daß diese Schlüsse denen des 3. Zus. beym 2. F. vollkommen ähnlich sind, es stehen nur statt

der

der dortigen	GKD	FKD	EKD	GD	FD	ED
hie	△ABC	△CED	△DEd	BC	CD	Dd

Man wird also auch begreifen, wie gegenwärtiger Satz für Irrationalverhältnisse nach Art des dortigen 11. Zus. erwiesen wird. Um Anfängern in einer Untersuchung die für schwer gehalten wird, alle nöthige Erläuterung zu geben, will ich den Beweis nach Art des dortigen, mit den gehörigen Veränderungen hersetzen. Es sey also der Linien CD: CB Verhältniß irrational, und man nenne die

Dreyecke	ABC = α	CED = β	DEd = γ
Linien	BC = a	CD = e	Dd = k

Ferner finde man durch die Halbirung (6. S. 1. Z.) die Linie Dd so daß CD von ihr gemessen wird, oder e = nk; so wird wegen der Irrationalverhältniß, BC von ihr nicht gemessen, fällt aber gewiß zwischen zwey Vielfache (multipla) von ihr, und es ist also a > mk, oder < (m + 1) k; welches die Grösse der Linie BC zwischen zwo Gränzen einschliesst die nur um k unterschieden sind. Und weil n ohne Ende wachsen, k ohne Ende abnehmen kann, so rücken diese Gränzen so nahe als man will zusammen; daher sich allemahl ein k finden lässt, von dem BC zwar nicht in völliger Schärfe, aber der Wahrheit so nahe als man will gemessen wird. Hier hat man also wieder Rationalverhältnisse, die der irrationalen BC: CD so nahe als man will kommen.

Weil

Weil aber jeder Theil = Dd, in den Dreyecken DEC, CAB, Theile = DEd giebt; so ist klar daß eben diese Rationalverhältnisse, der Verhältniß $\alpha : \varepsilon$ so nahe kommen als man will.

Nun ist $\alpha > m\varepsilon$ und $< (m+1)\varepsilon$ aber $\varepsilon = n\varepsilon$ folglich sowohl $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ als $\frac{a}{e}$ grösser als $\frac{m}{n}$ und kleiner als $\frac{m+1}{n}$. Sind also $a : e$ und $\alpha : \varepsilon$ nicht gleich so sey die erste grösser; und $\frac{a}{e} = \frac{m}{n} + x$; $\frac{\alpha}{\varepsilon} = \frac{m}{n} + y$, daß $x > y$; folglich $\frac{a}{e} - \frac{\alpha}{\varepsilon} = x - y$ welches eine Grösse seyn muß die sich angeben läßt, wofern beyde Verhältnisse, und daher beyde Quotienten unterschieden sind. Es ist aber sowohl x als y kleiner als $\frac{1}{n}$ und folglich auch ihr Unterschied, und $\frac{1}{n}$ kann kleiner als jede Grösse die sich angeben läßt werden, folglich auch $x - y$; folglich läßt sich zwischen beyden Quotienten, und daher auch zwischen beyden Verhältnissen kein Unterschied angeben, oder sie sind gleich.

1. Zus. Des 20. S. 12. Zus. gilt auch hie, nur daß man statt der dortigen Bogen, Winkel, hie: Grundlinien, Dreyecke schreibt.

Ein

Ein paar Linien können also allemahl angesehen werden, als hätten sie ein gemeinschaftliches Maas, wenn man dieses Maas unendlich klein, oder als ein Element, annehmen will. Das ist man kann allemahl ein Paar Linien mit einem gemeinschaftlichen Maasse der Wahrheit so nahe ausmessen, daß der Fehler so klein wird als man nur will, wenn man nur dieses Maas immer vermindert. Wenn es also kleiner als jede angegebene Grösse wird oder verschwindet so verschwindet auch der Fehler, und die beyden Mengen, wie vielmahl das Maas in der einen und in der andern Linie enthalten ist, drücken ihre Verhältniß mit einem verschwindenden Fehler, das ist der Wahrheit gemäß aus. Aber diese beyden Mengen lassen sich nicht in Zahlen angeben, sie übersteigen alle Zahlen die man angeben kann, und heissen unendlich groß, wie das Maas unendlich klein. Man erreicht eine solche unendlich grosse Menge nie wirklich, so wenig als das unendlich kleine Maas; Man sieht sie aber als erreicht an, und bedient sich dieser Redensarten, wieder zu Abkürzung des vorigen Vortrages.

Uebrigens kann man die Verhältniß jedes Paares gleichartiger Grössen, es mögen Flächen, Körper, Gewichte, Geschwindigkeiten u. d. gl. seyn, durch die Verhältniß eines Paares Linien vorstellen; und daher lassen sich in der nur erklärten Bedeutung zwo gleichartige Grössen allemahl

Digitized by Google

mahl ansehen als hätten sie ein gemeinschaftliches Maas.

Was Ar. V. 25; III. 49. von Irrationalverhältnissen gesagt worden, wird durch gegenwärtiges erweitert. Denn es giebt ohne Zweifel mehr Irrationalverhältnisse, als wir dort nur aus den Quadrat- und Cubikwurzeln herleiten konnten.

Anm. Wegen der Schwierigkeit welche die Irrationalverhältnisse bey diesen Beweisen machen, hat Euklides alles auf eine andere Erklärung der Proportion gegründet. Man sehe El. V. def. 6. 8. und daselbst Clavium.

2. Zus. Der 24. S. gilt auch von Parallelogrammen (14. S. 3. Z.).

25. Satz. Lehrsatz.

I. Wenn in dem Dreyecke ABC, die Linie DE mit der Grundlinie gleichlaufend gehet, so ist AD: DB = AE: EC. 72. F.

II. Wenn AD: DB = AE: EC so ist DE mit BC gleichlaufend.

Bew. I. Die Dreyecke DEB, DEC sind gleich (14. S. 2. Z.) also hat ΔADE zu beyden einerley Verhältniß. Es ist aber ΔADE: ΔBDE = AD: DB und ΔADE: ΔCDE = AE: ED (24. S.) also AD: DB = AE: EC.

II. Wenn AD: DB = AE: EC; und ΔADE: ΔDEB = AD: DB; ΔADE: ΔDEC = AE: EC: so ist ΔADE: ΔDEB = ΔADE: ΔDEC das ist ΔDEB = ΔDEC; also BC mit DE parallel (14. S. 2. Z.). I.

Digitized by Google

1. Zus. Es ist auch bey I; AD: AE = DB: EC (Arithm. V. 34. verwechselt).

2. Zus. Und AD: AB = AE: AE (Ar. V. 34).

3. Zus. Wenn in einem Dreyecke AEB, der nur genannte Winkel von der Linie ED halbirt wird; so ist AE: EB = AD: BD; denn man nehme auf der verlängerten AE, EC = EB, so ist AEB = EBC + ECB (13. S. 1. B.) = 2 ECB (2. S. 3. B.) also AED = ECB; und ED, CB gleichlaufend, (11. S.) folglich EC oder EB: BD = EA: AD.

4. Zus. Umgekehrt, wenn AE: EB = AD: BD, so halbirt ED den Winkel. Man nehme wieder EC = EB so ist AE: EC = AD: BD; also ED mit CB gleichlaufend, und AED = ACB (12. S) = ½ (ECB + EBC) (2. S. 3. B.) = ½ AEB (13. S. 1. B.).

26. Satz. Lehrsatz.

Wenn in zwey Dreyecken 80. F. ABC, DCE, die Winkel BAC = CDE; ABC = DCE, und also (14. S.) ACB = DEC, so verhalten sich jede zwo Seiten des einen Dreyecks, wie die beyden Seiten des andern, die den gleichen Winkeln gegenüber stehen.

Bew. Man lege zwo Seiten, die in beyden Dreyecken gleichen Winkeln gegenüber stehen, in eine gerade Linie, wie BC, CE, so ist

BA

BA mit CD, und CA mit DE gleichlaufend, (11. S.) und ED stößt verlängert mit BA zusammen (12. S. 1. Z.) dieses geschehe in F, so ist DF = CA; CD = AF (12. S. 3. Z.). Ferner BA: BC = AF: CE und BC: DF = CE: DE beydes aus (25. S. 1. Z.) schreibt man also CD; AC, statt AF, DF, so ist

BA: BC = CD: CE
BC: AC = CE: DE folglich (Ar. V. 51.)
BA: AC = CD: DE.

Zus. Durch die Verwechselung (Ar. V. 34.) werden aus diesen drey Proportionen drey andere, da beyde vorhergehende Glieder zu einem Dreyecke, und beyde folgende zum andern gehören. Z. E. BA: CD = BC: CE u. s. w.

27. Satz.

Es sey in den beyden Dreyecken BAC, bac, 8 F. BA: AC = ba: ac; und AC: CB = ac: cb woraus BA: BC = ba: bc folgt (Ar. V. 51.) so sind die Winkel in der Ordnung gleich, wie sie den proportionirten Seiten gegenüber stehen.

Bew. Man mache pbc = B, pcb = C; so ist vermöge des 26. S. BA: BC = bp: bc; oder wenn man statt der ersten Verhältniß die ihr gleiche im Dreyecke bac setzet ba: bc = bp: bc; also ba = bp; Eben so AC: BC = pc: bc oder ac: bc = pc: bc und ac = pc; Folglich

lich haben die Dreyecke bpc, bac, wie einerley Seiten, so einerley Winkel (4. S.) und es ist abc = cbp = B; acb = bcp = C, a = p = A.

Zus. Dreyecke, die einerley Winkel (26. S.) oder proportionirte Seiten (27. S.) haben, sind ähnlich (19. Erkl.) und ähnliche Dreyecke haben beydes; weil aus jedem das andere folgt.

Anm. Da sich zwey Dreyecke entweder durch die Winkel oder durch die Verhältnisse ihrer Seiten unterscheiden lassen, so scheinen diese Sätze schon aus dem Begriffe der Aehnlichkeit zu folgen, weil ähnliche Dinge ohne Zweifel solche sind, die man durch keine andern Merkmahle als ihre verschiedene Grösse unterscheiden kann. Denn ähnliche und gleiche Dinge wie die Dreyecke des 2. 3. 4. S. sind weiter nichts als ein Ding, das man sich zweymahl vorstellt. Daher hat der Freyh. von Wolf diese Lehren auf den Begriff der Aehnlichkeit gegründet. Die Verkürzung der Beweise, die er dadurch gesucht hat, scheinet nicht so beträchtlich, daß man deßwegen den Weg des Euklides verlassen sollte, und in der That ist der neue Weg, wenn man alles in gehöriger Schärfe erweisen will, nichts kürzer. Uebrigens hat Euklides eben den Begriff von der Aehnlichkeit gehabt, weil er eben die Dinge ähnlich nennt, die es nach dieser Erklärung sind.

28. Satz. Lehrsatz.

Wenn in zweyen Dreyecken B = abc, und AB : BC = ab : bc so sind die Dreyecke ähnlich.

Bew. Man mache cbp = B = cba, und bcp = C so sind die Dreyecke BAC, bpc, ähnlich (26. S.) und bp : bc = BA : BC = ba : bc; also bp = ba, und die Dreyecke bpc, bac,

Digitized by Google

ähnlich und gleich (2. S.) also BAC, bac, ähnlich; oder A = a; C = bca, BC : CA = bc : ca.

29. Satz. Aufgabe.

Eine gegebene Linie AB in Theile zu theilen, die eben die Verhältnisse unter einander haben, wie die gegebenen Theile AD, DE, EG; einer andern Linie: 82. F.

Aufl. An die getheilte Linie AG setze man AB in was für einem Winkel man will, nur daß es bequem ist, ihn weder allzuspitzig, noch stumpf zu nehmen; Man ziehe BG durch die Endpuncte, und damit auch die gegebenen Theilungspuncte D, E, Parallelen DH, EF, so ist AD : DE = AH : HF; DE : EG = HF : FB.

Bew. Die erste Proportion steht selbst im 25. S. daraus wird (Ar. V. 34. zusammengesetzt) AE : DE = AF : HF oder verwechselt; AE : AF = DE : HF = AD : AH wenn man bey der ersten Proportion verwechselt. Und AE : AF = EG : FB (26. S. 1. Z.) also EG : FB = DE : HF = AD : AH; durch welche Arten aus Ar. V. 34. zu schliessen, sich der Beweis fortführen lässt, wie viel auch Theile gemacht sind.

1. Zus. Sollte man AB in eine gegebene Menge gleicher Theile theilen, so darf man nur AG aus so viel gleichen willkührlich angenommenen Stücken AD = DE = EG u. s. w. zusammen setzen.

1. Anm.

Digitized by Google

1. Anm. Hie sucht man der Richtigkeit in der Ausübung wegen, daß dergleichen Stücke nicht allzuviel aneinander gesetzt werden müssen. Ist also die Menge der Theile, die man machen soll, ein Product, z. E. 15 = 3. 5. so theilet man AB erstlich in eine Menge von Theilen, die der eine Factor anzeigt, z. E. in 3, und einen dritten Theil wieder in soviel als der andere Factor anzeigt, als hie in 5. Es läßt sich auch diese Aufgabe auf mehr Arten auflösen, und die Ausübung durch Werkzeuge bequem machen, die man bey practischen Schriftstellern leicht verstehet, wenn man die gegenwärtigen Lehren wohl inne hat.

30. Satz. Aufgabe.

Zu drey gegebenen Linien AB, AC, BD, 83. F. die vierte Proportionallinie zu suchen.

Aufl. Auf die Schenkel eines willkührlichen Winkels, trage man die drey gegebenen Linien; die erste und zweyte, aus der Spitze auf den ersten, und andern Schenkel, die dritte wieder auf den ersten, von dem Puncte an, wo die erste aufhört. Alsdenn ziehe man BC, und damit DE gleichlaufend, so ist CE die gesuchte vierte, oder AB: AC = BD: CE (25. S. 1. Z.).

1. Zus. Wenn BD = AC so findet man auf diese Art zu zwo Linien die dritte.

2. Zus. Hat man so zu zwo Linien, p, q, die dritte f, gefunden, so ist p: f = 2. (p: q) (Ar. VI. 7). Nun suche man zu q, f, die dritte t, so ist p: t = 3. (p: q) (Ar. VI. 9) und so kann man fortgehen und Linien wie f, t, u. s. f.

Digitized by Google

finden, deren Verhältniß was für eine vervielfachte man will von p: q ist.

31. Satz. Aufgabe.

Zwischen zwo Linien AB, BC, 84. F. eine mittlere Geometrische Proportionallinie zu finden.

Aufl. Ueber ihrer Summe beschreibe man einen halben Kreis, den ein Perpendikel durch B in D schneide, so ist BD die gesuchte Linie.

Bew. Man ziehe AD, DC, so ist ADC = R (21. S. 1. Z.) das ist ADB + BDC = BDC + C (13. S. 2. Z.) also ADB = C folglich A = BDC (13. S.) und AB: BD = BD: BC (26. S.).

1. Zus. Also kann man die Verhältniß AB: BC halbiren; (Ar. VI. 8.) und in 4; 8; 16; u. s. f. Theile theilen, wenn man die Verhältniß AB: BD, und ihre Hälfte, u. s. w. halbirt.

2. Zus. Jedes rechtwinklichte Dreyeck wird durch das Perpendikel von dem rechten Winkel auf die Hypotenuse in zwey Dreyecke getheilet, die unter sich und dem ganzen ähnlich sind; und also auser der Proportion der Auflösung noch eine Menge anderer geben, die man, wenn sie gebraucht werden, aus den vorigen Sätzen leicht herleitet.

An=

Anwendung der bisherigen Lehren auf die ausübende Geometrie.

32. S. willkührlicher Satz.

Man nehme, gerade Linien zu messen, ein Maaß an, das man einen Fuß nennt. Zehn Fuß machen eine Ruthe; der zehnte Theil eines Fusses aber beträgt einen Zoll, des Zolles zehnter Theil heisst eine Linie. Für kleinere Eintheilungen besondere Nahmen zu machen, ist nicht nöthig, da man sie durch ihre Verhältniß zu den angezeigten bestimmen kann. Die Zeichen der Ruthen, Fusse, Zolle, Linien, seyen mit den Zeichen der Grade, Minuten ꝛc. (13. S. Anm.) einerley.

1. Zus. Also kann man diese Maasse bequem und ohne weitere Rechnung durch die gewöhnlichen Zifern ausdrücken und in einander verwandeln; z. E. $53^{\circ}\ 4'\ 7''\ 8'''\ IV = 13478^{IV}$.

1. Anm. Diese Bequemlichkeit, deren Gröſſe die Folge noch mehr zeigen wird, hat die Feldmesser veranlasset, nach dem Angeben Stevins, eines holländischen Mathematikverständigen, der die Ausübung mit tiefer Einsicht verband, diese Decimaltheilung zu gebrauchen. Sonst wird von Werkleuten der Fuß gewöhnlich in 12 Zolle getheilet; und so machen an manchen Orten 12 Fuß, auch wohl 15, 16, eine Ruthe, oder auch 6 Fuß, eine Klafter, einen Faden, ein Lachter, eine Toise. Man muß also die zehntheilichte Theilung auf die andere umgekehrt zu bringen wissen. Es sey von einerley Länge $\frac{1}{10} = x$ und $\frac{1}{12} = y$ so ist $10x = 12y$; also 1, 2. $y = x$ und $y = \frac{5}{6}x =$

$\frac{5}{6}$ x = x. 0, 8333. Soll man z. E. sagen, wieviel 7 Duodecimalzolle an Decimalzollen betragen, so ist 7 y = $\frac{35}{6}$. x = 5, 833 . . . x.

2. Anm. Eben so muß man Maasse, die an verschiedenen Orten gebräuchlich sind, in einander zu verwandeln wissen. Insgemein hat man an jedem Orte anfangs den Fuß vest gesetzet, und aus diesem die Ruthe und den Zoll bestimmt. Der Nahme Fuß, zeigt den Ursprung dieses Maasses an, das Jacob Köbels Geometrey (Frf. 1616.) 4. Bl. auf eine lächerliche Art bestimmen lehrt, die aber doch vor diesem ist gebraucht worden und den verdrüßlichen Unterschied des Fußmaasses oft zwischen zweyen benachbarten Dörfern verursacht hat. Paulini Zeitkürzende erbauliche Lust I. Th. 389 S. In Deutschland hat man Ursache den rheinländischen, der auch durch Dänemark eingeführt ist, zu kennen, und in mathematischen und physischen Rechnungen kömmt der pariser (pied du Roy) oft vor. Beyder Verhältniß ist: wenn dieser p jener r, heisst, p: r = 14400: 13913; Man hat den Pariser in 12″ diese in Linien, und jede Linie in 10, also den Fuß in 1440 Theile getheilet, durch die man die andern gewöhnlichen Fusse die fast alle kleiner sind, ausdrücket. Wäre die angegebene Verhältniß in der völligen Schärfe richtig, so wäre p = $\frac{14400}{13913}$ r = r. 1, 03500323 wodurch sich wie in der 1. Anm. einer auf den andern bringen läßt. Wenn man keine so grosse Schärfe sucht, die ohnedem die Natur der Sache nicht zuläßt, so kann man bequem die Logarithmen brauchen. Es ist nähmlich l (p: r) = l 14400 — l 13913 = 0, 0149418 welcher Logarithme zu 1, 0350 gehört, und negativ genommen l (r: p) ist. Setzt man r = 100000 oder zieht man ihn von 5 ab, so kömmt 4, 9850582 oder es ist $\frac{r}{p}$ = 0, 96618. Auch eine gegebene Menge von Fussen einer Art läßt sich durch die Logarithmen bequem in eine

Digitized by Google

eine andere verwandeln. Z. E. wieviel rheinländische Fuß machen 6 Pariser? Die Zahl der rheinländischen sey = x so ist 6 p = x r oder 6 p : r = x folglich

l (p : r) = 0, 0149418
l 6 = 0, 7781512
l x = 0, 7930930

giebt in grössern Logarithmischen Tafeln und durch Proportionaltheile x = 6, 21002 die höchsten vier Ziffern findet man auch in den kleinern Tafeln. Aber 6 x ist die halbe rheinl. Ruthe, also beträgt die Toise, 0, 21002 rheinl. F. über die halbe rheinl. R. und 2 Toisen machen 1 rheinl. Ruthe + 0, 42004 rheinl. Fuß. Sturm im veritable Vauban u. a. rechnen bey den Maassen in der Fortification, 2 Toisen für eine rheinl. Ruthe. Es sind aber z. E. 180 Toisen = 90. 2 Toisen = 90 Ruthen + 37, 8036 Fuß. Nimmt man also mit Sturmen 90 Ruthen statt 180 Toisen, so macht man die Linie um 3 Ruthen 1, 8036 Fuß zu kurz.

3. Anm. Maasse vermittelst andrer zu vergleichen, dient Ar. V. Cap. 51; und wenn viel Zwischengrössen dazu nöthig sind, die mehr zusammengesetzte Anwendung dieses Satzes die Kettenregel das. 56.

Ich nehme aus Philosophical Transactions Vol. 58. p. 326; den pariser Fuß = 1, 06575 des englischen. (Man sehe meine Abh. vom Höhenmessen mit dem Barometer 356. §.). Den Logarithmen hievon selbst aus kleinen Tafeln zu finden, zerfälle ich 1, 06575 = 0, 04263. 25

log 0, 04263 = 0, 6297153 — 2
log 25 = 1, 3979400
log 1, 06575 = 0, 0276553

Es sey nun der englische Fuß = a; so ist

r : p = 13913 : 14400
p : a = 1, 06575 : 1
r : a = $\frac{13913 \cdot 1,0675}{14400}$: 1

Digitized by Google

Man findet also

log 1,06575 = 0,0276553

abgezogen log $\frac{14400}{13913}$ = 0,0149418

log (r : a) = 0,0127135

log (a : r) = 0,9872865 — 1

giebt r = a. 1,0297

a = r. 0,97115

Wie man die Logarithmen braucht einen Fuß noch genauer durch den andern anzugeben; Meine Fortsetzung der Arithmetik VIII. Cap. 5. Abschnitt.

Vergleichungen von Fußmaassen findet man in mehr Büchern, z. E. Crusens Hamburgischen Contoristen, Hr. Prof. Mayers praktischer Geometrie, Metrologie, ou Traité des mesures, poids et monnoies, des anciens peuples et des modernes Par. 1780. Unter der Zueignungsschrift nennt sich der Verfasser Paucton u. s. w. Nicht alle solche Angaben sind gleich scharf und zuverlässig. Das ist Sammlern derselben desto leichter zu verzeihen, weil man zuweilen für einen und denselben Fuß nicht überall einerley Grösse bekömmt. Calenberger Fusse, die ich selbst besitze, in Händen gehabt, oder aus Nachrichten die nicht unglaubwürdig sind bestimmt habe, schwanken zwischen 128, 4 und 130, 2 pariser Linien. Der Hr. v. Münchhausen im Hausvater, I. Th. giebt diesen Fuß 129, 9 pariser Linien, und das scheint den meisten Beyfall zu verdienen.

Der grösste Fuß den ich kenne wird in Turin gebraucht, heißt Pied Liprand, von einem longobardischen Könige dessen natürlicher Fuß es soll gewesen seyn. (Man hatte vor Alters Schuhe mit langen gebognen Spitzen, die Spitzen sind hie vielleicht mit zum Fusse gerechnet). Antoni, Institutions physico-mechaniques (Strasb. 1777.) T. I. Phys. Ch. 1. §. 45; Note * p. 47. Aus dem was vor dem I. Th. p. XII; von der Pendellänge gesagt wird, habe ich ihn

ihn 1 Pariſſer Fuß 6 Zoll 11,348 Linien berechnet, welches auch mit erwähntem Buche übereinſtimmt. P. Beccaria, Gradus Taurinenſis (Aug. Taur. 1774.) S. 337; giebt den Turiner Fuß 18 Pariſer Zoll 11,70 Linien.

4. Anm. Eine Linie in viel Theile zu theilen und ſolche bequem abzunehmen, dienet der verjüngte Maaßſtab, deſſen Verzeichnung für das zehntheilige Maaß folgende iſt:

Die Länge Ak 85. F. gelte eine Ruthe. Man theile ſie in zehn gleiche Theile Aa = ab = bc u. ſ. f. (29. S. 1. Z.) und richte auf ihr ein Perpendikel AL auf, welches man aus eben den vorigen, oder aus zehn andern, doch unter ſich gleichen Theilen AB = BC u. ſ. f. zuſammenſetze. Durch die Theilungspuncte von AL ziehe man mit Ak gleichlaufende Linien, die ich Querlinien nennen will; auch ziehe man aL; und mit dieſer gleichlaufende Linien b 9; c 8; u. ſ. f. welche ſchiefe Linien heiſſen ſollen, und deren letzte k 1 iſt; und nachdem man LM = Ak gemacht, ziehe man kM ſo kann man innerhalb des Rechtecks ALMk alle Fuſſe und Zolle nehmen, die zuſammen weniger als 1° betragen. Das Dreyeck ALa giebt die Fuſſe, durch die Stücken der Querlinien, die zwiſchen K und La, I und La, H und La u. ſ. f. fallen, als welche Stücke 1, 2, 3, u. ſ. f. Fuß ſind (26. S.). Eben ſo enthält das Dreyeck k1M auf den Stücken Querlinien, welche zwiſchen k1, kM abgeſchnitten werden, die Fuſſe von k nach M hinaufwärts. Jedes Paar ſchiefe Linien aber ſchneidet zwiſchen ſich von allen Querlinien gleich groſſe Stücken ab (12. S. 3. Z.). Will man alſo z. E. 7′ 8″ nehmen, ſo faſſe man anfangs mit dem Zirkel die Länge ah = 7; Man wird eben dieſe Weite zwiſchen den beyden Durchſchnittspuncten jeder Querlinie mit aL und h 3 haben. Man gehe alſo in die Querlinie, wo eines von beyden vorerwähnten Dreyecken 8″ giebt. Im Dreyecke

ALa giebt solches die Querlinie durch C; Nachdem man also vorerwähntermassen die beyden Zirkelspitzen über die Durchschnitte dieser Querlinie mit aL; h 3; gebracht hat, so lasse man die Spitze, die sich über dem letzten Durchschnitte findet, unverrückt stehen, öffne aber den Zirkel, daß die andere Spitze über C kömmt: So ist das Stück Querlinie zwischen C und ihrem Durchschnitte mit h 3 so groß als 7′ 8″; Wollte man die Zoll in dem Dreyecke k1M nehmen, so müsste man in die Querlinie durch I gehen, und die beyden Zirkelspitzen, deren Weite = ah ist, über dieser Querlinie Durchschnitte mit d f und mit k 1 bringen; alsdenn die eine Spitze über dem Durchschnitte mit d f stehen lassen, die andere über den Durchschnitt mit kM bringen.

Will man nun auch ganze Ruthen nebst Fuß und Zoll nehmen, so darf man nur die Länge Ak, von k rechter Hand oder von A linker Hand auf die verlängerte Ak so vielmahl es angeht tragen, und durch die Puncte, die sich solchergestalt geben, Perpendikel ziehen. Es sey z. E. kp = Ak = MP; und man wollte 1° 9′ 6″ nehmen, so faßte man mit dem Zirkel erstlich pa = 1° 9′; Wenn man nun mit unveränderter Oefnung des Zirkels die eine Spitze pP hinauf führet, so bleibt die andere nicht in aL sondern beschreibt ein Perpendikel durch a auf Ak; Man gehe mit dem Zirkel solchergestalt bis dahin, wo das Dreyeck k1M, 6″ angiebt. Das geschieht da, wo es zwischen seinen Seiten k1, kM, ein Stück der Querlinie durch G enthält. Folglich hat man die verlangte Weite, wenn man die beyden Zirkelspitzen über die Durchschnitte der Querlinie durch G mit pP und mit aL bringt, nähmlich vom Durchschnitte mit pP bis an den mit kM ist 1°; Von dem mit k1 bis an den mit aL sind 9′; und von dem mit k1 bis an den mit kM sind 6″; die Zolle fallen hie zwischen die Ruthen und Fusse. Man hätte sie in dem Dreyecke ALa genommen;

wenn

wenn die Ruthen auf die Verlängerung von hA linker Hand von A wären getragen gewesen. Man begreift hieraus, wie die Zahlen können an diesen Maaßstab gesetzt werden. Wenn die Ruthen, wie in meiner Zeichnung, rechter Hand liegen, so werden die Zahlen oben von M nach L wie ich gethan habe, geschrieben, und statt K, I, H, G, u. s. f. kommen 1, 2, 3, 4, u. s. f. welche Zahlen sich auf die Zolle beziehen, die das Dreyeck kiM angiebt: Statt a, b, c, . . . kann man 1, 2, 3, . . . setzen. Werden aber die ganzen Ruthen linker Hand von A getragen, so kommen von L nach M die Zahlen in der Ordnung 0, 1, 2, . . . daß 10 in M kömmt. An die Stellen von L, K, I, . . . kömmt nichts, aber von M nach k herunter kömmt an die Durchschnitte der Querlinien 0, 1, 2, . . . bis 10 k; welche Zahlen sich auf die Zolle beziehen, die das Dreyeck LAa angiebt.

5. Anm. Wird solchergestalt Ak noch neunmahl nach einer von beyden Seiten getragen, so bekömmt man eine ganze Länge 10. Ak von der man vermittelst dieser Verzeichnung Tausendtheile wie man will, deren Menge nicht über 1000 beträgt, nehmen kann. Jede nähmlich der Längen, die = Ak sind, gilt 100. solcher Theile; jeder Fuß 10; und jeder Zoll 1. Dieser Gebrauch des Maasstabs kömmt häufig vor.

6. Anm. Linien, welche nur eine mittelmäßige Menge von Ruthen enthielten, würden auf keinem Papiere können dargestellt werden, wenn Ak = 1 R. seyn sollte. Man läßt daher insgemein Ak = 10. R. seyn, daß Aa = 1 R. ist, und also was zuvor Zolle waren, jetzo Fusse.

7. Anm. Die älteste Nachricht, die mir von diesem Maasstabe bekannt ist, finde ich in Tychos von Brahe Schriften. Er hat auf ähnliche Art, die Werkzeuge, die man Winkel zu messen braucht, abzutheilen gesucht, um die Winkel sehr scharf dadurch zu bekommen, und bekennt, daß er diese Abtheilung bey

Digitized by Google

bey geraden Linien anzubringen, zu Leipzig, wo er studirt hat, in seinem 17 Jahre (um 1553.) von dem dasigen geschickten Professor der Mathematik Johann Hommeln gelernt. Epistolar. Astronomicar. L. I. p. 62.

8. Anm. Aus eben dem theoretischen Grunde lassen sich Maasstäbe verzeichnen, die etwas anders aussehen, oder andere Eintheilungen des Ganzen voraussetzen.

33. S. Foderung.

Gerade Linien auf dem Felde zu messen, und ihrer Lage und Länge nach abzustecken.

Dieser Satz und die folgenden Foderungen sind eigentlich Aufgaben: Aber ihre Auflösung lässt sich nicht so gut sagen als zeigen. Man bedient sich zum Messen insgemein einer Meßkette, und zum Abstecken Stäbe, welche hie Puncte bedeuten. Man misst die Linien auf der Erde, und meistens bestimmt man ihre Lage durch solche Theile der Stäbe, die weit über der Erde sind. Also müssen die Stäbe auf der Fläche, auf der man misst, senkrecht stehen. Warum eigentlich dieses nöthig ist, und wie man es erhalten muß, lehrt die folgende Geometrie. Ich begehe aber diesen Fehler wieder die Methode, daß ich dergleichen hie schon voraussetze, mit Willen. Die Ungeduld, mit welcher Anfänger insgemein eine Anwendung der theoretischen Lehren auf diese so genannte Ausübung verlangen, lässt sich hie auf eine solche Art stillen, daß sie empfinden, es sey noch mehr Theorie nöthig, wenn die

Digitized by Google

die Ausübung ihre gehörige Richtigkeit haben soll, und also vielleicht dadurch auf Sätze aufmerksam werden, die sie sonst als leere Betrachtungen würden verabsäumet haben. In der That setzt die practische Geometrie auch noch verschiedene andere Lehren, aus der Optik, Mechanik, Naturlehre, u. s. w. zum voraus, die also auch nützlich seyn müssen, wenn sie nützlich ist, und ohne diese Lehren nicht richtig ausgeübt werden kann. Bey dem gegenwärtigen Vortrage der practischen Geometrie muß man solche Lehren als Erfahrungen annehmen.

34. Satz. Aufgabe.

Eine Weite AB 86. F. zu finden, die man unmittelbar nicht messen kann.

I. Fall. Wenn sich ein Stand C annehmen läßt, von dem man nach beyden Enden der Weite messen kann.

Aufl. Man messe CA, CB, und trage diese Längen auf die rückwärts verlängerten Linien in a; b; daß nähmlich ACa; BCb; gerade Linien sind, und Ca = CA; Cb = CB, so ist ab = AB (8. S 4. Z. und 2. S.).

Zus. Wenn sich hinter C Verhinderungen finden, die das Zurücktragen der ganzen Linien nicht verstatten, so trage man einerley Stücke von beyden in d, e, z. E. Cd = ½ CA; Ce = ½ CB so ist de auch ein solches Stück von AB;

AB; z. E. hie $\frac{1}{2}$ AB (28. S.). Eben so könnte man auf den Linien CB, CA selbst, einerley Stücke von ihnen CE, CD, ohne Zurücktragung, nehmen. Doch muß man bedenken, daß kleine Fehler, die man bey der Abmessung von de beginge, sich bey dem Schlusse auf AB vervielfältigten.

II. Fall. Wenn man vom Stande C nach A aber nicht nach B kommen kann 86. F.

Aufl. Man trage CA zurück in Ca, und an a den Winkel CaP = CAB (10. S.) alsdenn gehe man in der Linie aP fort, bis man zugleich in BC kömmt, der Punct, wo man sich alsdenn befindet b, ist ab = AB (3. S.).

Anm. Nimmt man auf CA nach Gefallen eine Länge CD macht EDC = BAC wie vorhin, so daß E in der Linie CB ist, und misst DE, so kann man sagen CD: DE = CA: AB: (26. S.). Dieses lehrt Christoph Puehlers kurze und grundliche anlaytung zu dem rechten verstand *Geometriae &c.* Dilingen 1583. in 50. C. Nimmt man für CD ein Stück, das CA misst, so hat man AB durch eine leichtere Rechnung.

III. Fall. Wenn man von C weder nach A noch nach B kommen kann.

Aufl. Man nehme einen Stand, von dem man nach C kommen kann; und finde CA; (II. Fall) imgleichen eben so CB; so lassen sich beyde zurücktragen und geben ab = AB (I. F.).

1. Anm. Diese Auflösung wird wegen der vielen Arbeit, die sie erfodert, selten gebraucht, da man die Frage vermittelst der nächstfolgenden Werkzeuge leich-

Digitized by Google

leichter beantworten kann, Man heißt aber das bisherige Feldmessen: mit blossen Stäben oder ohne Instrumente. Franc. a Schooten Exercitationes Mathematicae (Lugd. Bat. 1656.) L. II. Appendix Simplicium Problematum.

2. Anm. Weiten die man nicht unmittelbar messen kann, werden als Seiten eines Dreyecks betrachtet, von dem man soviel misst, daß man ein anderes ihm gleiches oder ähnliches verzeichnen kann. Hierauf, und also auf der Lehre von gleichen und ähnlichen Dreyecken, beruhet die ganze Feldmeßkunst.

35. S. Foderung.

Ein paar Linien auf dem Papiere zu ziehen, die eben den Winkel machen, den ein paar Linien auf dem Felde machen.

Dieses geschieht vermittelst des Meßtischchens und des Linials mit Absehen oder Dioptern, dessen vollkommnen Bau Marinon: de re ichnogr. lehrt. Branders Universalmeßtisch Augspurg 1767. Albrecht de mensula praetoriana Lipf. 1706. Eben dazu dient die Winkelscheibe, deren Gebrauch in Zollmanns Geodaesie umständlich gelehrt wird, auch G. H. W. (Werner) Unterricht zur Scheibenmessung.

1. Zus. Gesetzt, man hätte auf dem Felde das Dreyeck ABC (81. F.) in welchem man die Seite AB gemessen hätte. Man zeichnete auf Papiere ein Dreyeck abc, dessen Seite ab man nach dem verjüngten Maasse soviel Ruthen, Fuß, Zoll, lang nähme, als man AB nach dem wirklichen Maasse gefunden hätte, an a, b, aber setze

te man die Winkel a = A; abc = B an; so wäre das Dreyeck auf dem Papiere, dem auf dem Felde ähnlich, (26. S.) und ba: bc = BA: BC; ba: ac = BA: AC; also müssten bc, ca, nach dem verjüngten Maasse so viel Ruthen, z. E. halten, als BC, CA, nach den wirklichen. Dieses diente also, die Linien im Dreyecke auf dem Felde, aus dem gezeichneten zu finden, ohne daß man sie messen dürfte. Hätte man ba nicht nach dem verjüngten Maasse so lang genommen als BA nach dem wirklichen Maasse; so könnte man doch die Seiten des grossen Dreyecks aus den angegebenen Proportionen berechnen, aber durch Regeln Detri, die dieses Verfahren erspart.

2. Zus. Wenn man auf irgend eine andere Art, z. E. nach dem 28. S. das Dreyeck auf dem Papiere dem auf dem Felde ähnlich machen kann, und nur eine Seite von jenem nach dem verjüngten Maasse soviel hält als die ihm zugehörige Seite in diesem, nach dem wirklichen Maasse, so findet dieses bey allen Seiten beyder Dreyecke statt.

3. Zus. Man begreift leichte, daß die Seiten des Dreyecks auf dem Papiere sehr genau müssen gemessen werden, weil kleine Fehler bey ihnen grosse bey den auf dem Felde geben können. Daher muß der verjüngte Maaßstab nicht allzu klein seyn.

Anm.

Anm. Eine Linie auf dem Papiere, die nach dem verjüngten Maasse so viel hält als eine andere auf dem Felde, will ich der Kürze wegen, dieser gemäß nennen.

36. Satz. Aufgabe.

Den 34. Satz vermittelst des Meßtischchens aufzulösen.

I. Fall. 87. F. Man stelle es über C; den Punct des Meßtischchens, der gerade über C stehet, will ich c heissen. Man ziehe nach A, B, zu darauf Linien ca, cb, die man nach dem verjüngten Maasse so groß mache als CA, CB, nach dem wirklichen Maasse sind, so ist ab dem verjüngten Maasse nach so groß als AB nach dem wirklichen, (28. S.) oder ihr gemäß.

II. Fall. 88. F. Vom Puncte c über C; ziehe man nach A zu, ca der Linie CA gemäß, von c aber nach B zu ziehe man cp von unbestimmter Länge. Nun stelle man a über A, und ac so daß sie von A nach C zu geht, und ziehe von a nach B eine Linie, welche cp in b schneidet: So ist ab der AB gemäß (26. S.).

III. Fall. 89. F. Man nehme eine Standlinie, die man messen kann CD, an; von dem Puncte c des Meßtischchens, der über C stehet, ziehe man nach D zu, cd der CD gemäß; imgleichen, indem man cd in dieser Lage unverrückt läßt, nach A, B, zu unbestimmte Linien cα, cβ; Nun trage man es in D und stelle d über D, und dc längst DC, ziehe darauf von d nach A,

B, Linien, welche die vorigen in a, b, schneiden, so ist ab die gesuchte Weite nach dem verjüngten Maasse.

Denn Δacd ∽ ΔACD (26 S.) also cd: ca = CD: CA
und Δbcd ∽ ΔBCD cb: cd = CB: CD
folglich (Arithm. V. 51.) cb: ca = CB: CA
Nun ist aber auch acd = ACD; bcd = BCD,
also acb = ACB und Δacb ∽ ΔACB (28. S.)
also ca: ab = CA: AB und cd: ab = CD: AB.

Anm. Wollte man 91. F. die Weite BA finden, ohne das Tischchen fortzurücken, wie sonst nach dem II. F. geschehen muß; so stecke man Stäbe in C, D, mit A in gerader Linie, ziehe auf dem Meßtischchen von b nach A eine unbestimmte Linie, und nach C, D, bc, bd, den BC, CD, gemäß, so wird dc verlängert die Linie von b nach A, in a so schneiden, daß ba der BA gemäß ist. Denn Δ bcd ∽ ΔBCD (28 S.) also bca = BCA (8. S.) und weil cba = CBA so ist Δbca ∽ ΔBCA (26. S.) und bc: ba = BC: BA.

2. Anm. Wollte man also die Weite AE, an deren beyden Enden man nicht kommen kann, aus dem einzigen Stande B finden, so dürfte man nur noch in die Linie DE einen Stab F stecken, von b nach F eine Linie ziehen und sie der BF gemäß machen. So gäbe sich ein Punct f auf dem Meßtischchen durch welchen und d eine Linie gezogen, eine Linie, die von b nach E gezogen würde, in einem Puncte e schneiden würde, dessen Weite von a nach dem verjüngten Maasse soviel betrüge als AE nach dem wirklichen. Der Beweis fliesst eben aus der Aehnlichkeit der Dreyecke. Auf diese Aufgabe, die in Schwenters Geom. Pract. III. Tract. I. B. X. Aufg. steht, gründet sich das Feldmessen aus einem Stande, davon Ehrenberger in drey zu Coburg 1746. herausgegebenen programmatibus; de novis problematib. geom. cam-

campestrib. gehandelt hat. Es verdiente gebräuchlicher zu seyn, als es ist, da die mehrere Mühe, die es mit Messung der Linien erfodert, dadurch vergolten wird, daß die Fortsetzung des Tischchens vermieden wird: welches man nicht allemahl richtig genug wieder in seine gehörige Lage bringt.

Ein ander Feldmessen aus einem Stande, will Linien auf dem Felde angeben ohne was weiter gemessen zu haben, als was sich auf der Fläche des Werkzeuges selbst messen lässt. Schwenter Geom. Pract. 4 Tractat, beschreibt des Raverta Werkzeug dazu. Mayer Pantometrum Paceccianum Manheim 1767. Brander und Helfenzrieder, Distanzenmesser, in: Abhandlungen welche von der K. Dänischen Gesellschaft den Preis erhalten haben I. Samml. Copenh. 1781. Statt einer Standlinie auf dem Felde, hat man hie eine auf dem Werkzeuge, die nothwendig klein ausfällt, die Winkel sehr scharf zu beobachten erfodert, und für nur etwas grosse Weiten, nie, nur mittelmässige Zuverlässigkeit gewährt.

3. Anm. Linien die einen sehr spitzigen Winkel machen, lassen sich nicht wohl ziehen daß man ihren Durchschnitt genau bemerken kann: sie schleifen sich lange an einander hin. Eine auf Papier gezogene Linie ist eigentlich ein schmaler Streifen, zweene solche Streifen haben statt des Puncts eine Fläche gemein, die desto grösser ist je spitziger ihr Winkel ist. Meine Abh. Quanta incertitudine designentur vertices angulorum acutiorum Acta Ac. El. Moguntinae Erfurt, ad 1778; 1779. Bey Winkelmessern lässt selbst ihr Bau nicht zu sehr spitzige Winkel abzunehmen, und da kein solches Werkzeug den Winkel in der grössten Schärfe giebt so beträgt die Ungewißheit die es lässt, mehr in Vergleichung mit einem kleinern Winkel als mit einem grössern. Daher vermeidet man gern sehr spitzige Winkel, und folglich auch sehr stumpfe, die allemahl sehr spitzige zu Nebenwinkeln ha-

haben. Es kömmt meistens auf die Wahl des Standes an. Die Trigonometrie, sowohl die gemeine, als die welche mit der Analysis verbunden worden, zeigt was für Fehler in die Seiten aus den Winkeln und umgekehrt fliessen können, und wie man dieses beym Feldmessen zu brauchen hat. Denn da unsere Messungen alle nur beynahe wahr sind, so wissen wir nichts, wenn wir nicht wissen wieviel wir fehlen können. Wer also die ausübende Geometrie gehörig treiben will, muß sich um diese theoretische Kenntnisse bekümmern, zu denen unten in der Trigonometrie die Gründe gelegt werden. Hievon handeln Wolfii Elementa Trigonometr. Lat. §. 58. Rog. Cotesius de aestimatione errorum in matheſi mixta, bey den opuſculis die seiner Harmoniae menſurarum beygefügt sind. Opera Miſcellanea Rog. Cot. von Hr. Prof. Matsko auf Kosten eines Grafen Ferdinand von der Lippe herausgegeben Lemgo 1768. Marinoni de re ichnographica L. I. cap. V. Bouguer de la figure de la terre ſect. 2. art. 3. Mein Aufsatz von den Fehlern bey der practischen Geometrie, (om geometriska aberrationer) in den Abhandlungen der Kön. Schwedisch. Akad. der Wissensch. 1753. 2. Quartal. Bar. v. Palmquist über diesen Gegenstand, Abhandl. 1768. 2. Quart. Scherffer von Wahl des Standes Wien 1766.

37. Satz. Foderung.

Die Grösse eines Winkel auf dem Felde in Graden (22. S. 5. Z.) zu finden, und einen Winkel von eben so viel Graden auf Papier zu verzeichnen.

Die gemeine Bewerkstelligung dieser Foderung geschieht durch die Astrolabia, Winkelmeſ-

Digitized by Google

messer oder Scheibeninstrumente und den Transporteur.

38. Satz. Aufgabe.

Den 34. Satz vermittelst des Winkelmessers aufzulösen.

Aufl. I. Fall. 87. F. Man messe den Winkel C, und die Seiten CA, CB, woraus sich vermittelst des Transporteurs und verjüngten Maaßstabes ein kleines Dreyeck wie acb auf dem Meßtischchen war, verzeichnen lässt; in dem man ab misst, um AB zu wissen.

II. Fall. 88. F. CA und die Winkel C, A, gemessen, geben ebenfalls ein kleines Dreyeck, das dem grossen ähnlich ist.

III. Fall. 89. F. Man messe die Standlinie, CD, und mache ihr nach dem verjüngten Maaßstabe cd gemäß. Ferner messe man ACD, BCD, ADC, BGD, und setze in eben solchen Winkeln Linien an c, d, wodurch sich die Punkte a, b, auf dem Papiere geben, deren Weite der Weite AB gemäß ist.

Anm. Dieses Verfahren ist von dem nächstvorhergehenden nur darinnen unterschieden, daß die kleine ähnliche Figur hie besonders muß gezeichnet werden, die sich bey dem Meßtischchen gleich während der Arbeit selbst giebt. In dieser Bequemlichkeit hat also das Meßtischchen ohnstreitig den Vorzug. Es ist aber in andern Absichten nicht vermögend, der Richtigkeit eines vollkommenen Winkelmessers gleich zu kommen, den man daher bey grossen Messungen vorzuziehen hat. Aber dessen eigentlicher Gebrauch ist

Digitized by Google

mit der Trigonometrie verbunden. Von Transversallinien und Vernier dadurch bey ihm die Winkel genau eingetheilt werden, meiner astron. Abhandl. II. Samml. 5. Abh. Hr. v. Castillon über die Theilung von Winkelmessern; Nouv. Mem. de l'Ac. de Prusse 1780.

1. Zus. Eine Höhe AB; 90. F. ist eine Weite, zu deren einem obern Ende B man nie kommen kann. Kann man von einem angenommenen Stande C, an das untere Ende A kommen, so stelle man das Instrument gerade über C in D, und bestimme den Winkel EDB, wo DE wagrecht angenommen wird; dieser nebst DE = CA (12. S. 3. Z.) giebt in dem bey E rechtwinklichten Dreyecke BED die Seite BE; zu der man die Höhe des Instruments DC = EA addirt um BA zu haben.

2. Zus. Wenig Dinge, an denen man Höhen messen will, gestatten, was der 1. Zus. annimmt. Kann man also auch nicht an A kommen; so muß man AB aus zween Ständen D, G, messen. Die Winkel BDE, BGE, und die Standlinie DG, geben das Dreyeck BDG: hat man solches nach dem verjüngten Maaßstabe gezeichnet; so fälle man von seiner Spitze B auf GD das Perpendikel BE zu dem man wie vorhin die Höhe des Instruments addirt. Ich setze zum voraus, daß der Boden ACF wagrecht ist, und D, G, in einer wagrechten Linie, und einer lothrechten Ebene durch BA sind: Abweichungen hievon erfodern Aenderungen in dem vor-

Digitized by Google

vorgeschriebenen Verfahren, die sich aber hie auser der Weitläuftigkeit, mit der ich sie erklären müsste, nicht alle vollkommen verstehen, noch weniger erweisen lassen.

3. Zus. Wenn man von D den Punct A der lothrecht unter B liegt, sehen, aber nicht dahin kommen kann oder will; so messe man BDE, EDA, = R — ADC; und DC; also kann man nach dem verjüngten Maaßstabe DC ziehen, und daran ADC imgleichen ein Perpendikel durch setzen, so giebt sich der Punct A; durch diesen richte man ein Perpendikel auf CA auf, ziehe DE mit CA gleichlaufend, und daran DB in dem Winkel EDB; so schneiden DB und das Perpendikel durch A einander in B. Dieses Verfahren geht bey einer auch nur mittelmässigen Höhe BA nicht wohl an, wenn DC die blosse Höhe eines gewöhnlichen Feldmesserswerkzeugs wäre, weil die Dreyecke da gar zu spitzige Winkel bekämen; aber es kann gebraucht werden, wo DC gegen BA nicht so gar sehr geringe ist, z. E. die Höhe eines Thurmes, aus dem Fenster D eines gegenüberstehenden Hauses zu finden; wenn nur A lothrecht unter B liegt.

39. Satz. Lehrsatz.

Wenn die Figuren ABCDE, abcde, 92. F. einander ähnlich, und zwar die Seiten in der Ordnung wie einerley Buchstaben an ihnen stehen, einander proportionirt sind, so ziehe man

nach Gefallen durch D, C, Linien, die einander in F schneiden, und durch d, c, Linien in eben den Winkeln mit dc die einander in f schneiden. Die beyden Puncte F, f, heissen ähnlichliegende, und wenn man aus ihnen an alle Winkel der Figuren gerade Linien zieht, so entstehen lauter ähnliche Dreyecke.

Bew. ΔDFC ∽ Δdfc (26. S.) also DF: CD = df: cd aber CD: DE = cd: de (19. Erkl.) folglich DF: DE = df: de (Ar. V. §1.) und weil FDC = fdc; EDC = edc (19. Erkl.) so ist EDF = edf, also ΔEDF ∽ Δedf (28. S.); diese Aehnlichkeit der letztgenannten Dreyecke folgte aus der angenommenen Aehnlichkeit der ersten Dreyecke DFC, dfc; und so erhellt, daß aus der Aehnlichkeit der Dreyecke EDF, edf, die Aehnlichkeit der an ihnen anliegenden EAF, eaf, folget, und so aus der Aehnlichkeit jeden Paares Dreyecke, immer die Aehnlichkeit des nächstanliegenden Paares geschlossen wird.

1. Zus. Da die Lage des Punctes F ganz willkührlich ist, so kann man ihn in einen Winkel annehmen, da denn f in eben den Winkel der andern Figur fallen muß, und von den Linien FC, fc, u. s. f. zwey Paare, Seiten der Figuren, die übrigen Diagonalen werden. Also werden ähnliche Figuren durch ihre Diagonalen in ähnliche Dreyecke getheilet 93. F.

2. Zus. Auf einer gegebenen Linie dc, eine Figur zu zeichnen, die einer gegebenen Figur ABCDE

Digitized by Google

ABCDE ähnlich ist, theile man die gegebene Figur durch Diagonalen in Dreyecke: und setze auf dc ein Dreyeck dcb das dem DCB ähnlich ist (26. S.) wieder auf db eines dab das dem DAB ähnlich ist, u. s. f. setze man die ähnlichen Dreyecke auf ähnliche Art aneinander.

3. Zus. Man lege in der 94. F. f auf F, und fd, fc, längst FD, FC, so fallen auch fa, fb, fe, u. s. f. längst FA, FB, FE, u. s. f. und die Seiten der kleinen Figur liegen mit den Seiten der grossen gleichlaufend (12. S.). Und umgekehrt, wenn man in FA, durch einen willkührlichen Punct a, ab mit AB, denn durch b, bc mit BC u. s. f. gleichlaufend ziehet, so wird die innere Figur der äusern ähnlich. Denn wäre sie ihr unähnlich, so mache man über ab eine Figur, die der äusern ähnlich ist, (2. Z.) so werden die Seiten dieser ähnlichen Figur vermöge des ersten Theils gegenwärtigen Zusatzes mit den Seiten der äusern gleichlaufend seyn: Also ist ihre Seite, die durch b geht, mit BC parallel; und muß daher bc seyn (12. S. 1. Zus.) u. s. w.

40. Satz. Aufgabe.

Eine Figur in Grund zu legen; d. i. auf dem Papiere eine Figur zu entwerfen, welche der auf dem Felde ähnlich sey.

Aufl. Man stelle sich die Figur auf dem Felde in Dreyecke getheilt vor und messe von jedem soviel, daß man eines zeichnen kann, das ihm

ähnlich wird (39. S. 2. Zus.). Diese allgemeine Auflösung läßt sich nach den verschiedenen Umständen, die man annimmt, in Fälle zergliedern. Ich will nur drey zu Beyspielen anführen.

I. Wenn man in die Figur auf dem Felde ABCDE 92. F. kommen, und nach Gefallen darinnen messen kann. Da nehme man F nach Gefallen an, und messe der Dreyecke FAB; FBC; u. s. f. ihre Seiten FA, FB, FC, u. s. w. ingleichen ihre Winkel bey F, so kann man um einen Punct f herum ähnliche Dreyecke fab, fbc, u. s. f. beschreiben (28. S.). Das Meßtischchen, über F gesetzt, giebt diese ähnliche Dreyecke gleich selbst wie 94. F. Man hat auch nicht nöthig alle die langen Linien aus F zu messen, sondern kann statt ihrer zuweilen Seiten brauchen. Z. E. wenn man FC nicht messen wollte, aber b auf die gehörige Art bestimmt hätte, so zöge man fb und machte daran einen Winkel = BFC, dieses Winkels andern Schenkel durchschnitte man aus b mit einem Kreise, dessen Halbmesser der Linie BC die man messen müsste, gemäß wäre, so gäbe sich c; Weil es aber zweene Durchschnitte giebt, so muß man acht geben, ob BCF spitzig oder stumpf ist, und daher dieses Verfahren nicht brauchen, wenn er beynahe ein rechter ist, weil da beyde Durchschnitte zu nahe zusammen kommen, auch muß man zuweilen Linien von F an die Winkel, zur Probe und Versicherung messen.

Will

Will man sich die Mühe geben alle Seiten, und alle Diagonalen zu messen, so kann man ein Feld auf diese Art nach der 93. F. in Grund legen, ohne daß man einiges anderes Werkzeug dazu braucht, als Stäbe und Meßkette. Dieses Verfahren giebt in der That die meiste Richtigkeit, aber es ist mühsam.

II. Kann man nicht in die Figur kommen, aber um sie herum gehen, so messe man 94. F. alle Seiten und Winkel.

III. Kann man aus zween Ständen alle Winkel einer Figur 94. F. übersehen, so lassen sich die Längen ihrer Seiten und derselben Lagen gegen einander nach 36. 38. S. III. Fall finden, auf welche Art ganze Gegenden in Grund gelegt werden.

Anm. Das bisherige enthält beynahe völlig die Theorie des Feldmessens. Die Ausübung setzt, ausser der wirklichen Handanlegung, noch verschiedene Kenntnisse zum voraus, die man aus besondern Büchern erlernen muß. Man wird solches mit leichterer Mühe thun, wenn man das bisherige wohl gefaßt hat, und dadurch im Stande seyn, sowohl die Beschaffenheit der Werkzeuge richtiger zu beurtheilen, als sich bey vorfallenden Schwürigkeiten zu helfen. Die Vorschriften, wie man bey solchen Schwürigkeiten verfahren soll, sind eine Last für das Gedächtniß handwerksmässiger Feldmesser, wenn ihre Erfindung ein Vergnügen für den Verstand des Geometers ist.

Einige Bücher von der praktischen Geometrie.

Penther Praxis Geometriae Augsp. 1732; Zuppa de; Augsp. 1739.

Zoll-

Zollmanns Geodäsie Halle 1744.
Christoph. Clavii Geometria practica Rom. 1604.
Erasmus Reinhold vom Feldmessen und Markscheiden 1574 und 1615.
Schwenter Geom. Pract. Nürnb. 1667.
Böhmens Anleitung zur Meßkunst auf dem Felde. 1759.
D. St. zu Verfertigung schöner Risse anweisender Ingenieur Nürnb. 1750.
Marinoni de re ichnographica Vienn. 1751.
Helfenzrieder Geodäsie Ingolstadt 1776.
Mayers praktische Geometrie III. Theile Götting. 1777. 83.

41. Satz.

In dem Kreise 63. Fig. ist AIB ein Bogen, dessen Sehne AB.

Diesen Bogen und seine Sehne, halbirt EFI ein Perpendikel aus dem Mittelpuncte E (17. S.).

Des halben Bogens AI = IB Sehne ist die gerade Linie AI.

Die Länge des ganzen Bogens übertrifft seine Sehne, um einen gewissen Unterschied.

Nach diesen Voraussetzungen, zeigt sich folgendes:

I) Der Unterschied zwischen halben Bogen und seiner Sehne, ist kleiner, als die Hälfte des Unterschiedes zwischen ganzen Bogen und seiner Sehne.

II) Der Unterschied zwischen halben Bogen und seiner Sehne, ist ein kleinerer Theil von seinen Bogen, als der Unterschied zwischen dem gan-

Digitized by Google

ganzen Bogen und seiner Sehne, von dem seinigen.

III) Die geometrische Verhältniß des halben Bogens zu seiner Sehne, ist der Verhältniß 1 : 1 näher, als die geometrische Verhältniß des ganzen zu der seinigen.

Beww. I. Des halben Bogens Sehne ist die gerade Linie AI; grösser als AF, die Hälfte der Sehne des ganzen Bogens (15; 17; S.).

Es sey also: ganzer Bogen — seiner Sehne = u So wäre: Halber Bogen — der halben Sehne des ganzen = $\frac{1}{2}$ u Folglich ist
Halber Bogen — seiner Sehne < $\frac{1}{2}$ u

II. Man setze den ganzen Bogen = h; seine Sehne bezeichne man so: Sehn h; Eben so heisse des halben Bogens seine: Sehn $\frac{1}{2}$ h.
So giebt der Bruch $\frac{h - \text{Sehn } h}{h}$; an, was für ein Stück der Unterschied zwischen ganzem Bogen und seiner Sehne, vom ganzen Bogen ist.
Eben so, der Bruch $\frac{\frac{1}{2}h - \text{Sehn } \frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h}$; was für ein Stück der Unterschied zwischen halben Bogen und Sehne, vom halben Bogen ist.
Der letzte Bruch lässt sich auch so ausdrükken: $\frac{h - 2\,\text{Sehn } \frac{1}{2}h}{h}$.

So

So ausgedruckt, hat er einerley Nenner mit dem ersten, aber einen kleinern Zähler, ist folglich kleiner.

III. $\frac{h}{\text{Sehn } h} > \frac{\frac{1}{2}h}{\text{Sehn } \frac{1}{2}h}$; weil des zweyten Bruches Nenner, grösser ist als die Hälfte des Nenners vom ersten Bruche.

Jeder dieser Brüche ist grösser als 1; weil jeder Bogen grösser ist als seine Sehne.

Der kleinere von beyden Brüchen, kömmt also der 1 näher als der grössere. Und folglich die Verhältniß des halben Bogens zu seiner Sehne der Verhältniß 1 : 1 näher, als die Verhältniß des ganzen Bogens zu seiner Sehne.

Erläuterung. Eigentliche Exempel zur Erläuterung lassen sich hie deßwegen nicht beybringen, weil bisher noch keine Vergleichung zwischen Sehnen eines ganzen und halben Bogens ist gewiesen worden. Und ob es gleich kein unverzeihlicher Fehler wider die Methode wäre, Exempel deren Zahlen erst aus Lehren die in der Folge vorkommen konnten gefunden werden, hie, zur Erläuterung, nicht zum Beweise, beyzubringen, so würde doch, hie nicht alles im Gebrauche dieser Zahlen deutlich genug seyn, wenn man noch gar nicht einsieht wie sie sind gefunden worden. Ich will also Etwas das aus dem vorhergehenden vollkommen verständlich ist beybringen, welches die Sätze I; II; III; nicht von ganzen und hal-

Digitized by Google

halben Bogen, aber doch einen ganzen und dessen Theile erläutert.

Des Halbkreises Sehne, ist der Durchmesser, des sechsten Theiles vom Umfange seiner, der Halbmesser (23. S. 5. Zus.).

Aus dem letzten Satze folgt, daß der Umfang grösser ist als sechs Halbmesser. Man nenne also den Halbmesser r; den Umfang P; so ist $P = 6r + y$ wo ich y jetzo nicht weiß.

Also gehören zusammen

Bogen	Sehnen
$\frac{1}{2}P$	$2r$
$\frac{1}{6}P$	r

Der kleinere Bogen ist $\frac{1}{3}$ des grössern, hat aber eine Sehne, halb so groß als des grössern seine.

Der grössere Bogen ist $= 3r + \frac{1}{2}y$ und übertrifft also seine Sehne um $r + \frac{1}{2}y$; der kleinere ist $r + \frac{1}{6}y$ und übertrifft seine Sehne um $\frac{1}{6}y$; welches also geringer ist als $\frac{1}{3}$ dessen, um welches der dreymahl grössere Bogen seine Sehne übertrifft.

Ferner: der Unterschied zwischen dem grossen Bogen und seiner Sehne, mit dem grossen dividirt, giebt $\frac{r + \frac{1}{2}y}{\frac{1}{2}P} = \frac{2r + y}{P}$ Und eben das bey dem kleinern gethan, giebt $\frac{y}{P}$; einen kleinern Quotienten als jenes, und zwar viel kleiner weil y viel kleiner ist als $2r$; woran ich

ich aber, da ich diese Grösse als unbekannt ansehe nicht denke.

Also beträgt hie der Unterschied, zwischen einem Drittheile eines Bogens, und dieses Drittheils Sehne, was geringers als den dritten Theil des Unterschiedes zwischen dem ganzen Bogen und desselben Sehne. Und jener Unterschied ist ein kleiner Stück von seinem Bogen, als dieser von dem seinigen.

Endlich, findet man aus vorhergehenden, daß der Halbkreis mit seiner Sehne dividirt $= \frac{3r + \frac{1}{2}y}{2r}$; der sechste Theil des Kreises mit seiner Sehne dividirt $= \frac{r + \frac{1}{6}y}{r}$. Der erste Quotient ist $= \frac{3}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{y}{r}$; der zweyte $1 + \frac{1}{6} \cdot \frac{y}{r}$ offenbahr der Einheit näher als jener; folglich ist hie die geometrische Verhältniß des kleineren Bogens zu seiner Sehne, der Verhältniß 1 : 1 viel näher, als des grössern Bogens Verhältniß zu seiner Sehne.

1. Zus. I. Wenn m 63. Fig. eine gerade Linie ist, so klein als man will, so lässt sich durch Halbiren, allemahl ein Bogen finden, der von seiner Sehne um was geringers unterschieden ist als m. Denn wenn zwischen h und seiner Sehne, der Unterschied u grösser oder gleich so groß als m ist, (wäre er kleiner so hätte man schon

das

das was gefunden werden soll) so geben wiederhohlte Halbirungen, Bogen, die von ihren Sehnen um was kleiners als $\frac{1}{2}$ u; $\frac{1}{4}$ u; $\frac{1}{8}$ u . . . . unterschieden sind. Unter diesen fortgesetzten Halbirungen der Grösse u kömmt man gewiß auf Stückchen die kleiner als m sind.

II. Aber ein solcher Bogen, dessen Unterschied von seiner Sehne, sehr klein wäre, könnte vielleicht auch selbst sehr klein seyn. Und wenn in diesem Falle der erwähnte kleine Unterschied, ein beträchtliches Stück von ihm, folglich auch von seiner Sehne ausmachte, so würde man nicht sagen daß die geometrische Verhältniß des Bogens zu seiner Sehne, der Verhältniß 1 : 1 sehr nahe wäre.

Gesetzt ein Bogen überträffe seine Sehne nur um ein Milliontheilchen eines Zolles. Wäre es nun möglich daß dieser Bogen selbst, nur zehn solche Milliontheilchen lang wäre, so verhielte er sich zu seiner Sehne wie 10 : 9 eine Verhältniß, die man nicht statt 1 : 1 setzen würde wenn man nur mässig scharf rechnet.

III. Daß man Grund hat dieses nicht zu erwarten, zeigt der II. Theil des Satzes. Der Unterschied wird nicht nur kleiner, sondern auch gegen seinen Bogen weniger beträchtlich.

IIII. Aber, geht dieses so weit als man will? so daß man durch fortgesetzte Hälbirungen allemahl auf einen Bogen kommen kann, da der Unterschied, ein kleiner Stückchen von ihm als

Digitized by Google

jeder gegebene Bruch austrägt? die Verhältniß zur Sehne, der 1 : 1 so nahe ist als man will.

V. Die bisherigen Schlüsse zeigen nur daß $\frac{h - \text{Sehn}\, h}{h}$; $\frac{\frac{1}{2}h - \text{Sehn}\, \frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h}$; $\frac{\frac{1}{4}h - \text{Sehn}\, \frac{1}{4}h}{\frac{1}{4}h}$ u. s. w. Brüche sind, die immer kleiner und kleiner werden, aber daß man in der Reihe dieser Brüche allemahl auf einen kommen muß der kleiner ist als jeder gegebene Bruch, das beweisen sie nicht.

Blos daraus, daß Brüche die in einer Reihe nach einander folgen, immer kleiner und kleiner werden, läßt sich gar nicht schliessen daß allemahl unter ihnen einer vorkömmt der kleiner ist als jeder gegebene Bruch. Denn zwischen ein paar Brüche, so nahe sie auch selbst an einander seyn mögen, z. E. zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ lassen sich allemahl unzählich viel setzen, von denen jeder folgende immer kleiner als der vorhergehende seyn wird, und doch noch grösser als der letzte.

VI. Eben so, bedeute z. E. x in $\frac{3,6 + x}{3}$ eine Grösse die immer abnimt, selbst bis auf nichts, so nähert sich dieser Quotient immer der Einheit, aber nicht weiter als bis an 1, 2.

Also, daß die Quotienten $\frac{h}{\text{Sehn}\, h}$; $\frac{\frac{1}{2}h}{\text{Sehn}\, \frac{1}{2}h}$; $\frac{\frac{1}{4}h}{\text{Sehn}\, \frac{1}{4}h}$ u. s. w. der Einheit immer näher und

näher

näher kommen, das allein, beweist nicht daß sie ihr so nahe kommen als man nur will.

VII. Dieses habe ich deßwegen deutlich aus einander zu setzen für nöthig erachtet, weil solche Schlüsse, wie ich V; VI; ehtkräfte, einem Anfänger doch wohl sehr sicher vorkommen möchten. Und, Gelegenheit zu der Warnung vor einem solchen Betruge zu haben, das allein würde mich schon rechtfertigen, daß ich die Untersuchungen gegenwärtigen 41 Satzes vorgetragen habe, wenn auch diese Untersuchungen nicht in der That den Weg wiesen sich der Ausmessung des Kreises so weit man will zu nähern. Daß sie aber dieses thun wird in der Folge erhellen.

VIII. Nachstehendes wird zeigen, daß es Bogen giebt die ihren Sehnen so nahe kommen als man will.

Ich brauche dabey die 95. Fig. wo einerley Buchstaben einerley mit der 63 bedeuten; IED ist ein Durchmesser des Kreises.

2. Zus. I. AF ist kleiner als der Halbmesser folglich kleiner als DF; wenn der Bogen AIB kleiner ist als der Halbkreis.

Nun ist DF: FA = FA: FI (31. S.) also FI kleiner als FA.

II. Man stelle sich vor, die Sehne AB rücke, immer senkrecht auf EI, gegen I zu, so wird sie immer kleiner, und nimmt bis auf nichts ab, wird also klein als man will.

III. Also wird der Quotient $\frac{AF}{DF}$; und der ihm gleiche $\frac{FI}{AF}$ so klein als man will.

IIII. Man nenne FI die Höhe des Bogens AIB; Es ist die grösste Entfernung die ein Punct dieses Bogens von seiner Sehne haben kann; jeder andere Punct als I ist näher bey der Sehne.

V. Indem die Sehne so klein als man will wird, (II) wird des Bogens Höhe, so ein klein Stückchen von der halben Sehne als man nur will, (III) so unbeträchtlich gegen die halbe Sehne, so unbeträchtlich die halbe Sehne gegen den Durchmesser wird.

VI. Der Bogen ist länger als seine Sehne weil er von ihrem gemeinschaftlichen Anfange, immer durch andere und andere Puncte geht bis zu ihrem gemeinschaftlichen Ende. Ist seine Höhe in Vergleichung mit der Sehne sehr klein, so liegt jeder Punct durch den er geht, sehr nahe bey einem Puncte der Sehne, Punct des Bogens und Punct der Sehne rücken immer näher und näher an einander, je kleiner die Höhe wird. Man darf dieses zu erläutern, sich nur von jedem Puncte des Bogens ein Perpendikel auf die Sehne vorstellen.

VII. Dieser Bogen (VI) muß also nothwendig sich zur Sehne beynahe wie 1 : 1 verhalten;

denn

Digitized by Google

wenn von A durch eine Reihe Puncte bis B gehen, und von eben dem Anfange, bis an eben das Ende, durch eine andere Reihe Puncte gehen, deren jeder nahe bey einem Puncte der vorigen Reihe liegt, das muß wohl so ziemlich einerley Weg geben.

VIII. Weil nun die Höhe des Bogens gegen die Sehne so unbeträchtlich werden kann als man will, so kann auch die Verhältniß des Bogens zur Sehne, der Verhältniß 1 : 1 so nahe gebracht werden als man will, und der Unterschied zwischen Sehne und Bogen, gegen Sehne oder Bogen so unbeträchtlich werden als man will.

VIIII. In VII; ist stillschweigend etwas angenommen worden, das ausdrücklich angezeigt zu werden verdient.

Man stelle sich durch A, B, Perpendikel auf die Sehne gezogen vor. Nun nehme man im Bogen AI zweene Puncte, den zweyten zwischen dem ersten und I. Dieser zweyte Punct ist allemahl weiter von dem Perpendikel durch A, näher bey dem durch B, und zugleich weiter von der Sehne AB, als der erste.

Nimmt man aber ein Paar Puncte im Bogen IB, den zweyten zwischen B und dem ersten; so ist dieser zweyte gleichfalls weiter vom Perpendikel durch A, näher bey dem durch B, aber näher bey der Sehne AB als der erste.

Wer also in dem Bogen AIB vom Anfange bis ans Ende geht, der entfernt sich beständig von dem Perpendikel durch den Anfang der Sehne, nähert sich beständig dem durch ihr Ende; Von der Sehne selbst, entfernt er sich eine Zeitlang beständig, und diese Zeit über nähert er sich ihr nie; Dann fängt er an sich der Sehne zu nähern, und nun nähert er sich ihr beständig, ohne sich je wieder von ihr zu entfernen.

Das Alles zusammen, sagt der Ausdruck: der Bogen sey beständig gegen seine Sehne hohl (concav). Und das wird erfodert, wenn die Schlüsse VII; VIII; gelten sollen.

X. Warum dieses erfodert wird, begreift man leicht so: Man stelle sich einen krummen Zug vor der von A anfangs gegen das Perpendikel durch B zu ginge, dann wieder gegen das durch A zurück, und solche Wendungen oft wiederhohlte; auch sich der Sehne AB bald nähert bald wieder von ihr entfernte, die Entfernung möchte nie mehr betragen als IF. Ein sinnliches Bild von einem solchen Zuge wird es geben wenn man ihn schlangenförmig nennt; der 1. Taf. 2. Fig. stellt so was vor, wenn man nur B statt ihres F setzt.

Wer einen solchen Zug durchwandert, kann innerhalb einer kleinen Fläche einen grossen Weg zurücklegen, ohngefähr, wie man in einem kleinen Zimmer, hin und her spaziernd, so viel Schritte thun kann, als zu einer Meile gehören.

Aber

Aber bey dem Kreisbogen AIB findet so was nicht statt, und daher gelten von ihm die angezeigten Schlüsse.

XI. So lange die Sehne eine Grösse hat die sich angeben lässt, so lange man von ihr sagen kann, was für einen Theil des Halbmessers sie beträgt, so lange giebt sie auch einen Bogen von bestimmter Grösse an, dessen Höhe über die Sehne, zur Sehne und zum Halbmesser eine Verhältniß hat, die sich angeben lässt, und so ist die Verhältniß des Bogens zur Sehne der 1 : 1 vielleicht nahe, aber doch nicht mit ihr einerley.

Will man sich also einen Bogen vorstellen, dessen Höhe gegen die Sehne ganz unbeträchtlich, dessen Verhältniß zur Sehne, so gut als ganz genau 1 : 1 ist, so muß nach (II) die Sehne ganz an I gerückt seyn, und weder Sehne noch Bogen, können Grössen haben, die sich angeben liessen.

XII. In dieser Bedeutung sagt man: eine unendlich kleine Sehne, sey ihrem Bogen gleich, verliere sich in demselben, und sey um den Halbmesser vom Mittelpuncte entfernt. Man nennt hie unendlich klein einen Zustand dem sich nach (II) die Sehne beständig nähert, ihn noch nicht erreicht hat, so lange sie eine bestimmte Grösse hat, aber ihm so nahe kommen kann als man will, weil sie von einer bestimmten Grösse, durch alle kleinere, bis auf nichts abnehmen kann.

Digitized by Google

XIII. Dieses Unendlichkleine bedeutet also daß eine Grösse, durch alle bestimmte Werthe bis auf nichts abnehmen, und folglich kleiner werden kann, als jede Grösse so klein sie auch angegeben wird. Eben wie das Unendlichgrosse ein Wachsen von eben der Art anzeigt (12. S. 12; 14. Zus.).

XIIII. Wenn man einen Bogen halbirt, und diese Halbirungen immer weiter und weiter fortsetzt, so kömmt man gewiß auf Bogen, kleiner als jeder gegebene Bogen. Des halben Bogens Sehne ist auch kleiner als die Sehne des ganzen, obgleich grösser als derselben Hälfte; die Verhältniß der Sehnen AI: AB nähert sich der Verhältniß 1: 2 immer mehr und mehr, je kleiner IF gegen AF wird, je kleiner die Sehne des ganzen Bogens ist. Da nun IF gegen AF so klein werden kann als man will, so kann die Verhältniß dieser beyden Sehnen der 1: 2 so nahe kommen als man will, und man kann sagen: durch unendlich viel Halbirungen, komme man auf unendlich kleine Bogen; wo nicht nur der halbe Bogen die Hälfte des nächstvorhergehenden Ganzen, sondern auch die Sehne des halben Bogens, halb so groß als die Sehne des ganzen ist. Jede dieser Sehnen nähmlich verliert sich in ihrem Bogen (XII) daher verhalten sie sich wie ihr Bogen.

XV. Diesem Zustande, den man erst durch unendliche Halbirungen, das ist, durch Halbirung

rung nie erreichte, weil offenbahr, jede Menge von Halbirungen die man gemacht hat, sich zählen lässt, so groß auch ihre Zahl seyn möchte, diesem Zustande kömmt man also, durch wiederhohlte Halbirungen so nahe als man will. Und so erhellt, daß man durch wiederhohlte Halbirungen (im 1. Zus. V.) nicht nur immer kleinere und kleinere Brüche bekömmt, sondern so kleine als man will; daß man durch solche Halbirungen (daselbst VI;) nicht nur Quotienten bekömmt die der 1 immer näher und näher kommen, sondern solche, die ihr so nahe kommen als man nur will. Das heisst soviel.

XVI. Der Umfang des Kreises sey in eine gewisse Menge gleicher Theile getheilt, ich will gleich zum Beyspiele sechs nennen. Die Sehne eines solchen Bogens, ist die Seite eines ordentlichen Vielecks; im Exempel eines Sechsecks. Der Umfang dieses Vielecks ist also kleiner als der Umfang des Kreises.

Ein Vieleck in eben dem Kreise, das noch einmahl soviel Seiten hat, im Exempel ein Zwölfeck, hat einen grossen Umfang, der also des Kreises Umfange näher kömmt. Soviel ist klar, selbst ohne den 41. Satz. Und, so geben wiederholte Halbirungen der Bogen, Seiten für Vielecke, da die Zahl der Seiten immer verdoppelt wird, für das Vierundzwanzigeck, Achtundvierzigeck, u. s. w. Jedes der folgenden dieser Vielecke hat einen Umfang der grösser ist, als

der Umfang des nächstvorhergehenden, und also gewiß des Kreises Umfange näher kömmt.

Daß nun diese Näherung so weit als man will kann getrieben werden, daß man so immer auf ein Vieleck kommen kann, dessen Umfang von des Kreises seinem, so wenig als man will unterschieden ist, das einzusehen ist (XV) nöthig.

XVII. So sagt man nun: der Umfang eines Kreises, sey einerley mit dem Umfange eines ordentlichen Vielecks von unzählich viel Seiten, das in ihn beschrieben ist.

Jede dieser Seiten ist die Sehne eines Bogens, die sich in ihrem Bogen verliert.

Stellt man sich zwischen ihr und ihrem Bogen einen Unterschied vor; so muß man diesen Unterschied, für ein unendlich kleines Stück des Bogens annehmen.

Die Sehne unzählich viel mahl genommen, giebt den Umfang des Vielecks; der Bogen, eben sovielmahl genommen, den Umfang des Kreises.

Des Kreises Umfang, übertrifft den Umfang des Vielecks, um den Unterschied zwischen Sehne und Bogen, unzählich vielmahl genommen; das ist, um etwas, welches gegen den ganzen Umfang eben so unbeträchtlich ist, als es, einmahl genommen, gegen den einzelnen Bogen, des Umfangs unendlich kleinen Theil war.

Zur

Zur Erläuterung, nicht zum Beweise, bringe ich ein Beyspiel mit Zahlen die der Wahrheit nahe sind. Wenn man 60 Grad fünfmahl nach einander halbirt, bekömmt man $\frac{1}{192}$ P $= \frac{1}{3}$ L $= 1°$ 52′ 30″. Setzt man den Halbmesser $= 1$, so finde ich diesen Bogen, so genau als hier nöthig ist $= 0{,}032724$; seine Sehne $= 0{,}032723$; also den Unterschied zwischen Sehne und Bogen viel kleiner als $\frac{1}{30000}$ des Bogens. Der Umfang des Kreises, übertrifft den Umfang des 192 Ecks, um 192 solche Unterschiede, deren jeder viel kleiner als $\frac{1}{30000}$ von $\frac{1}{192}$ des Umfangs des Kreises ist. Folglich um etwas das viel kleiner als $\frac{1}{3000000}$ des Umfangs des Kreises ist.

3. Zus. I. Man ziehe 95. Fig. noch zu vorige an A, I, B, Tangenten, die an A und B schneiden die an I, in M, N. So ist das Viereck ABNM kleiner als ein Rechteck wäre, das AB zur Grundlinie, FI zur Höhe hätte. Von einem solchen Rechtecke wäre ΔAIB die Hälfte, also ist dieses Dreyeck grösser als die Hälfte des genannten Vierecks, folglich auch grösser als die Hälfte des Abschnittes der zwischen dem Bogen AIB und desselben Sehne enthalten ist.

II. Dieser Abschnitt, besteht aus dem Dreyecke, und den beyden gleichen kleinen Abschnitten, zwischen dem Bogen AI und seiner Sehne, dem Bogen IB und der seinigen.

III.

III. Diese beyden kleinern Abschnitte betragen also zusammen was kleiners als die Hälfte des grossen.

IIII. Es sey z. E. die gerade Linie AB, die Seite des ordentlichen Sechsecks im Kreise, so ist der ihr zugehörige Abschnitt, der Unterschied, um welchen der Ausschnitt des Kreises AEB, grösser ist als das geradelinichte Dreyeck das mit eben den Buchstaben bezeichnet würde. Sechs solche Dreyecke machen die Fläche des Sechecks, und sechs Ausschnitte die Fläche des Kreises. Die Kreisfläche übertrifft also des Sechsecks Fläche um sechsmahl den Abschnitt zwischen Bogen und Sehne AB.

Eben so übertrifft die Kreisfläche, des Zwölfecks Fläche um zwölfmahl den Abschnitt zwischen Bogen und Sehne AI.

Aber dieser Abschnitt ist kleiner als die Hälfte jenes; also sein Zwölffaches, kleiner als jenes Sechsfaches. Also die Fläche des Zwölfecks, von der Kreisfläche weniger unterschieden als die Fläche des Sechsecks.

V. Man sieht leicht, daß dieser Beweis eben so von jedem Vielecke auf das das noch einmahl so viel Seiten hat fortgeht. Allemahl ist des folgenden Fläche, der Kreisfläche näher als des vorhergehenden seine. Und selbst ohne solche Schlüsse, erhellt dieses daraus, weil des folgenden Vielecks Fläche grösser ist als des vorhergehenden seine.

VI.

Digitized by Google

VI. Wiederum aber könnte man fragen ob diese Näherung so weit gehen kann als man will. Darauf würde sich Folgendes antworten lassen.

VII. Die Dreyecke IAF; EAF, verhalten sich wegen der gemeinschaftlichen Höhe AF, wie ihre Grundlinien IF: FE (24. S.). Eben so verhalten sich die Dreyecke die doppelte von jenen sind ΔIAB : ΔAEB. Nun ist der Abschnitt zwischen Bogen und Sehne AB kleiner als 2ΔAIB (I) Also

$$\frac{\text{Dieser Abschnitt}}{\Delta AEB} < \frac{2.FI}{FE}$$

VIII. Nun kann $\frac{2\,FI}{FE}$ so klein werden als man will (2. Zus. II.) also der Abschnitt, so ein klein Stückchen des Dreyecks als man will. Und dieses Stückchen wird sehr klein, wenn AF gegen FE sehr klein wird, denn da ist FI selbst schon gegen AF sehr klein.

VIIII. Zu einer sehr kleinen Sehne, gehört also ein sehr kleiner Ausschnitt; ein sehr kleines Dreyeck AEB; und ein Abschnitt, der selbst in Vergleichung mit diesem Dreyecke sehr klein ist.

X. Ist die kleine Sehne, die Seite eines ordentlichen Vielecks, von n Seiten, wo n eine sehr grosse Zahl ist; so giebt das kleine Dreyeck n mahl genommen, die Fläche des Vielecks: Ihr fehlt zur Fläche des Kreises, der Abschnitt n mahl genommen. Was ihr also zur Fläche

Digitized by Google

des Kreises fehlt, ist in Vergleichung mit ihr so klein, so klein der Abschnitt in Vergleichung mit dem Dreyecke ist.

4. Zus 1. Nun nehme man in der vorhin erklärten Bedeutung der Wörter die Sehne unendlich klein, und den Umfang des Kreises für den Umfang eines ordentlichen Vielecks, das unzählich viel, unendlich kleine Seiten hat. Jede dieser Seiten ist vom Mittelpuncte um den Halbmesser entfernt, oder eigentlicher, ihrer Entfernung vom Mittelpuncte, fehlt zum Halbmesser etwas, das in Vergleichung mit der unendlich kleinen Seite selbst, unendlich klein ist (2. Zus. XII.). So hat jedes der unzählichen Dreyecke aus denen dieses Vieleck besteht zur Höhe den Halbmesser, zur Grundlinie einen unendlich kleinen Theil des Umfangs vom Kreise. Jedes solcher Dreyecke ist kleiner als der Ausschnitt des Kreises der zwischen seine Schenkel fällt, aber um einen Abschnitt, der in Vergleichung mit dem Dreyecke selbst unendlich klein ist. Alle diese Dreyecken zusammen machen die Fläche des Vielecks, und ihr fehlt zur Fläche des Kreises, die Summe aller erwähnten Abschnitte, welche Summe in Vergleichung mit der Fläche des Vielecks unendlich klein ist. Des Kreises Fläche ist also mit der Fläche dieses Vielecks einerley.

II. Die Fläche des Vielecks ist aber so groß als ein Dreyeck, dessen Höhe das Perpendikel aus

Digitized by Google

aus dem Mittelpuncte auf eine Seite des Vielecks, die Grundlinie des Vielecks Umfang ist (23. S. 10. Zus.) die Höhe ist der Halbmesser, der Umfang des Vielecks des Kreises Umfang. Also ist des Kreises Fläche so groß, als die Fläche eines Dreyecks, dessen Höhe der Halbmesser, die Grundlinie des Kreises Umfang ist.

III. Man sieht leicht daß dieses Alles zusammen nur soviel heisst: Die Fläche eines ordentlichen Vielecks im Kreise, nähert sich der Fläche des Kreises immer mehr, je mehr das Vieleck Seiten bekömmt, und kömmt der Kreisfläche so nahe als man will, da zugleich der Umfang des Vielecks des Kreises Umfange, und ein Perpendikel aus dem Mittelpuncte des Vielecks auf eine Seite, den Halbmesser so nahe als man will kommen.

5. Zus. AI 66. F. sey ein unendlich kleiner Bogen, in den sich seine Sehne verliert (2. Z.) weil das Dreyeck BAI gleichschenklicht ist, so ist BAI = R − ½ABI (13. S. 5. Z.) aber ABI ist unendlich klein (22. S. 7. Z.) daß man also BAI = R schätzen kann: d. i. der Punct I fällt in die Tangente (19. S. 1. Z.). Man kann also sagen, die Tangente habe einen unendlich kleinen Theil, ein Element mit dem Kreise gemein, das zwischen zween zusammengehenden Puncten des Umkreises (19. S. 4. Z.) enthalten ist.

6. Zus. Daher läßt sich der unendlich kleine Bogen AI als der Weg ansehen, den der Punct, wel-

welcher im Kreise herumgeht, in dem Augenblikke nimmt, da er in A ist. Oder der Weg dieses Punctes, seine Richtung an diesem Orte, die sich alle Augenblicke ändert (6. Erkl.) ist die Tangente.

Anm. Diese Begriffe lassen sich überhaupt auf krumme Linien erweitern. Eigentlich sagt der 6. Zus. soviel: die Richtung, welche ein Punct, der eine krumme Linie AIL beschreibt, in A hat, macht mit der Tangente AD einen kleinern Winkel, als jede andere gerade Linie, die man durch A nach der Seite, auf welcher die krumme Linie liegt, ziehen kann. Es muß sich nähmlich zwischen der Tangente und der krummen Linie keine gerade Linie durch A ziehen lassen; Weil man nun durch A gerade Linien ziehen kann, die ohne Ende fort immer kleinere und kleinere Winkel mit AD machen, so muß die Richtung, welche zwischen jeder dieser Linien und die Tangente fallen soll, von der Tangente nicht zu unterscheiden seyn.

42. Satz. Lehrsatz.

Wenn sich die beyden Seiten AB, AC eines Rechteckes 96. F. mit einer Linie AE = AF ausmessen lassen, so steckt das Quadrat von AE in dem Rechtecke so vielmahl, so viel Einheiten das Product AC. AB enthält, wenn man die beyden Seiten als Zahlen ansieht, deren Einheit die Linie ist, die sie beyde misst.

Bew. Der Linie AE, Quadrat AFGE; kann so vielmahl neben einander auf AB gesetzt werden, so vielmahl seine Seite in AB enthalten ist; dieses giebt also eine Reihe Quadrate, die

an

Digitized by Google

an AB anliegt. An AC aber können so viel solche Quadrate gesetzt werden so vielmahl AF in AC enthalten ist, und also so viel Reihen Quadrate hintereinander stehen. Folglich bestimmt AB auf die erwähnte Art als eine Zahl betrachtet, die Menge der Quadrate in einer Reihe, und AC die Zahl der Reihen, also beyder Zahlen Product die Menge der Quadrate zusammen.

1. Zus. Nimmt man ein solches Quadrat als die Einheit an mit der Flächen sollen ausgemessen werden, so giebt diese Multiplication den Innhalt der Fläche, nähmlich die Menge solcher Flächeinheiten, die in dem Rechtecke enthalten sind.

2. Zus. Wenn sich des Rechteckes MO Seiten mit eben dem Maasse messen lassen, so ist die Verhältniß beyder Rechtecke = CA. AB : PM. MN, oder aus den Verhältnissen CA : PM und AB : MN zusammengesetzt (Ar. VI. 3.).

Anm. Eine Linie mit einer andern multipliciren, heißt eigentlich zu einer angenommenen Einheit, und den beyden Factoren, die vierte Proportionalgröße suchen, (Ar. V. 20.) welches also eine Linie seyn muß, und der 30. S. in Zahlen aufgelöst ist, wenn daselbst AB = 1. angenommen wird. Also drücken sich diejenigen unrichtig aus, welche sagen, aus dem Producte zwoer Linien entstehe ein Rechteck. Aber dieses Product verhält sich zu dem Producte zwoer andern Linien, die man mit eben der Einheit gemessen hat, wie sich die Rechtecke unter beyden Paaren Linien verhalten.

Digitized by Google

3. Zus. Da man alle Linien ansehen kann, als hätten sie ein gemeinschaftliches Maaß; wie im Beweise des 24. S. ist gezeigt worden, so ist gegenwärtiger Satz mit seinen Zusätzen allgemein. Gesetzt AB liesse sich genau mit AE ausmessen, aber AC mit AF = AE nicht, sondern AK wäre das Vielfache von AF das AC am nächsten kömmt, und der Rest KC wäre kleiner als AF; so ist AD grösser als die Menge der Quadrate die durch die Multiplication AK. AB angezeigt wird, und zwar um einen schmalen rechteckichten Streifen grösser dessen Grundlinie CD; die Höhe oder Breite, KC < AF ist. Weil man nun den Theil AE der AB genau misst, so klein machen kann als man will, so kann AK der Länge AC so nahe kömmen als man will, und der erwähnte Streifen so schmal werden als man will; Das Product AK. AB druckt also den Innhalt des Rechtecks der Wahrheit völlig gemäß aus, wenn des Streifens Breite KC verschwindet, und folglich ist AC. AB der Innhalt des Rechtecks, auch wenn die Höhe in Vergleichung mit der Grundlinie eine Irrationalzahl ist.

Ich habe diesen Vortrag der Ausrechnung der Rechtecke, als den leichtesten gewählt. Sonst pflegt man mit etwas veränderter Ordnung diese Lehren so zu erweisen.

Man mache MS = AB und ergänze das Rechteck PMSQ; dieses lässt sich mit MO und

mit

Digitized by Google

mit AD, nach 24. S. 2. Z. vergleichen. Bey der Vergleichung mit MO ist die gemeinschaftliche Höhe MP = QS, die unterschiedenen Grundlinien sind MS MN; Bey der Vergleichung mit AD ist die gemeinschaftliche Höhe MS = AB, die Grundlinien sind AC, MP; also ist

AD: MQ = AC: MP
MQ: MO = MS: MN

Folglich (Ar. VI. 1.) AD: MO = (AC: MP) + (MS: MN) oder AC: MP) + (AB: MN) der letzte Theil des 2. Zus.

Also auch aus (Ar. VI. 3.) AD: MO = AC. AB: MP. MN des erwähnten Zusatzes erster Theil. Dieses folgt auch vermittelst (Ar. V. 50.) aus den obigen beyden Proportionen.

Also ist auch AD: AG = AC. AB: AE. AF oder = AC. AB: AE^2 welches der Satz selbst ist.

4. Zus. Wäre AD ein Quadrat, so käme der Innhalt heraus, wenn man die Seite mit sich selbst multiplicirte.

5. Zus. Es ist also verstattet den Innhalt, eines Rechteckes, dessen beyde Seiten a, b, heissen mögen, durch ab und wenn a = b den Innhalt des Quadrates durch a^2 auszudrücken. Nähmlich wenn eines andern Rechteckes beyde Seiten p, q, heissen, so ist die Verhältniß der Flächen beyder Rechtecke ab: pq.

Da müssen, eine Linie in einem Rechtecke und eine in dem andern, mit einerley Masse ge-

Digitized by Google

messen werden; und wiederum die zweyte Linie in dem ersten, und die zweyte in dem andern, auch mit einerley Maasse, obgleich nicht nothwendig ist daß es das vorige sey.

Es sey a = AC 96. Fig. = 4 Fuß
b = AB = 7 Zoll
p = MP = 3 Fuß
q = MN = 5 Zoll

Man verstehe unter Zoll den zwölften Theil des Fusses.

So ist AD : MO = $4.\frac{7}{12} : 3.\frac{5}{12} = 4.7 : 3.5$. Die Rechtecke verhalten sich also wie die Producte aus ein Paar Zahlen deren jedes sich auf eine andere Einheit bezieht.

In diesem Exempel nähmlich, wäre AG kein Quadrat, sondern ein Rechteck davon die Höhe AF = 1 Fuß, die Grundlinie AE = 1 Zoll. Dergleichen Rechtecke wären 4. 7 in AB; und 3. 5 in MO enthalten.

Man sieht leicht daß dieses nur erinnert wird, die Sätze in der grössten Allgemeinheit abzufassen, daß es aber übrigens die Rechnung unnützer Weise verwickelter machte, wenn man ein Paar Seiten mit einem Maasse, das andere mit einem andern messen wollte.

Sieht man ab: pq als den Ausdruck der Verhältniß an, die aus a: p und b: q zusammengesetzt ist, so ist wiederum offenbahr, daß es genug ist, wenn die beyden Glieder der ersten Verhältniß, mit einerley Maasse, und die beyden

den Glieder der zweyten auch mit einerley gemessen werden, ob dasselbe gleich mit dem Maasse der vorigen nicht einerley wäre.

Wenn b = 7 Zoll; q = 7 Zoll ist, so muß man die Verhältniß b: q = 7: 5 finden, was für ein Maaß man auch für beyde Linien brauchte, wenn es nur für beyde einerley ist. Mässe man sie mit halben Zollen, so müsste jene 14; die 10 seyn, sie würden so in andern Zahlen ausgedrückt, aber dieser Zahlen Verhältniß wäre noch 7: 5; u. s. w.

6. Zus. Man kann also in der Ausübung die Seiten des Rechtecks, mit den gewöhnlichen Maassen (32. S.) messen, so zeigt das Product an, wie viel Quadrate des Maasses, das man gebraucht hat, im Rechtecke enthalten sind. Z. E. Es sey AB = 6′; AC = 5′ so ist AD = 6. 5 = 30. Quadrate eines Fusses: oder Quadratfuß; Kreuzfuß, gevierte Fuß.

7. Zus. Eigentlich muß man also beyde Seiten mit einerley Maasse messen; Wäre die eine = 7′ die andere 5′ 4″ so müsste man die erste auch in Zollen ausdrücken, um die Menge von Quadratzollen zu bekommen, welche den Innhalt gäbe. Braucht man nun Decimalmaaß, so wäre sie = 70″ und der Innhalt = 54. 70 = 3780. Quadratzolle. Wäre aber zwölftheiliges Maaß gebraucht worden, so müsste man 7′ = 7. 12″ = 84″ und 5′ 4″ = 5. 12″ + 4″ = 64″ mit einander multipliciren, welches die vor-

zügliche Bequemlichkeit des zehntheiligen weiset.

8. Zuſ. Die Frage zu entſcheiden, wie viel Quadrate vom niedrigen Maaſſe ein höheres enthält, und umgekehrt, dient folgende Betrachtung: Wenn AB = AC = 10. AE wäre, ſo enthielte AD 100. Quadrate; nähmlich 10. in einer Reihe, und 10. Reihen. Nun ſey AB = AC = 1° zehntheilichtes Maaß, ſo iſt AD eine gevierte Ruthe, die alſo hundert gevierte Fuß enthält. Aus eben dem Grunde enthält der gevierte Fuß oder Zoll, hundert gevierte Zoll oder Linien. Folglich ſind 12436728‴ in Quadratmaaſſe = 12° 43′ 67″ 28‴ und umgekehrt 7° = 700′ = 70000″ = 7000000‴.

Anm. Hieraus wird erhellen, wie nach den Regeln der Rechnung mit den zehntheilichen Brüchen hie verfahren werden kann, ohne alle Maaſſe nach dem x. Zuſ. auf das niedrigſte zu bringen. Z. E. wenn die beyden Seiten 7° 2″ und 3° 2′ 4″ ſind, ſo nehme man die Ruthe für die Einheit an, und der Innhalt wird (nach Arithm. III. 2. 9.) = 7, 2. 3, 24 = 23, 328 = 23 Quadr. R. 32′ 80″.

9. Zuſ. Hätte man zwölftheilichtes Maaß gebraucht, ſo hielte die Quadratruthe 144 gevierte Schuh; und der gevierte Schuh oder Zoll, auch ſoviel gevierte Zoll oder Linien. Alſo bringt man hie die höheren Maaſſe auf niedrigere durch die Multiplication, und die niedrigere auf höhere durch die Diviſion mit 144. Z. E. 7° = 7. 144′ = 908′, und 438927″ = 3048′ 15″ = 21′ 24‴.

Digitized by Google

24′ 15″. So hält bey sechszehntheilichem Maasse, die gevierte Ruthe 16. 16 = 256 gevierte Fuß u. s. w.

10. Zus. Im 15. S. 60. F. ist $BC = \sqrt{(AB^2 + AC^2)}$ oder wenn man AB, AC, mit einerley Maasse gemessen hat, so hält BC von diesem Maasse so viel, als die Wurzel aus der Summe der Quadrate anzeigt.

11. Zus. Ist also diese Wurzel irrational, (Ar. III. 26.) so hat die Hypotenuse mit den Seiten kein gemeinschaftliches Maaß. Der einfachste Fall hievon ist, wenn die Seiten gleich sind, da jede = 1 gesetzt werden kann; und also die Hypotenuse $= \sqrt{2}$. Es giebt also Linien, die Irrationalverhältnisse haben, und Irrationalzahlen lassen sich durch Linien ausdrükken, z. E. im angeführten Exempel ist die Hypotenuse vollkommen richtig $= \sqrt{2}$. Die Geometrie leistet hie etwas dadurch, daß sie das Ganze auf einmahl darstellt, oder seine Gränzen bestimmt, dazu die Arithmetik unvermögend war, welche die Theile des Ganzen nach und nach suchte, und sie also nie alle fand, wenn ihre Menge unendlich war.

12. Zus. Im 31. S. ist $BD^2 = AB.BC$ (Ar. V. 31.) oder $BD = \sqrt{AB.BC}$; welches einen neuen Weg giebt alle Irrationalzahlen durch Linien darzustellen; wenn man AB = 1 und BC = 2, = 3, = 5, u. s. f. setzt, daß BD die Wurzel aus 2, 3, 5, u. s. w. wird.

Digitized by Google

13. Zuſ. Ein ſchiefes Parallelogramm EBCF (55. F.) auszurechnen, laſſe man, von welchem Puncte einer Seite man will, ein Loth EG auf die gegenüberſtehende fallen, ſo iſt der Innhalt = EG. BC; denn der Innhalt iſt einem Rechtecke BADC über eben der Grundlinie BC gleich, (14. S.) und die ſenkrechte Seite dieſes Rechtecks AB iſt = EG.

14. Zuſ. Wenn die beyden Linien AB, BC, ſenkrecht auf einander ſtehen, und das ihnen zugehörige Rechteck ADCB ergänzt wird; ſo hat ſolches einen gröſſern Innhalt, als wenn man ein Parallelogram mit ſchiefen Winkeln macht, das eben die Seiten hätte: Nähmlich eine Linie = AB ſchief auf BC geſetzt, würde ſich unter EF endigen.

15. Zuſ. Der Innhalt eines Dreyecks 56. F. kömmt heraus, wenn man das Product aus ſeiner Höhe Aa in die Grundlinie CD halbirt. (14. S. 3. Zuſ.) Er iſt alſo $\frac{Aa. CD}{2}$ oder $\frac{1}{2}$. Aa. CD oder $\frac{1}{2}$ CD. Aa.

16. Zuſ Jedes Vieleck wie ABCDE 93. F. läſſt ſich durch Diagonalen in Dreyecke zergliedern, die man alſo nach 15. Zuſ. einzeln ausrechnen, und zuſammen addiren kann; zur Verkürzung der Arbeit muß man allezeit die Seite, die zweyen Dreyecken gemein iſt, für ihre gemeinſchaftliche Grundlinie annehmen, und darauf

Digitized by Google

auf die Höhen von den gegenüberstehenden Winkeln fällen; z. E. in den Dreyecken AED, ADB, auf AD, von E und B.

17. Zus. Ein ordentliches Vieleck n F. ist $= \frac{1}{2}$ KQ (AB + BC ... + FA) (23. S. 10. Zus.) $=$ KQ. $\frac{m}{2}$. AB, wenn die Zahl der Seiten m ist.

Anm. Für jedes ordentliche Vieleck, ist die Verhältniß von KQ und AB gegen einander, und gegen den Halbmesser des Kreises, bestimmt. Das erste erhellet daraus, weil KQ $= \sqrt{}$ (AKq - AQq) (15. S.) aber AQ $= \frac{1}{2}$ AB (17. S.) also AQq $= \frac{1}{4}$ ABq (12. S. 11. Z.) also KQ $= \sqrt{}$ (AKq $= \frac{1}{4}$ ABq) die allgemeine Bestimmung der Seite von jedem ordentlichen Vielecke, durch den Halbmesser, läßt sich hie nicht lehren, in der Trigonometrie aber wird davon geredet werden. Zum Exempel kann hie das Sechseck dienen. Es sey AK $=$ I $=$ AB; so ist AQ $= \frac{1}{2}$ $=$ 0, 5 und KQ $= \sqrt{}$ (I $-$ 0, 25) $= \sqrt{}$ 0, 75 $=$ 0, 8660; also der Innhalt des Sechseckes $=$ 3. 0, 8660 $=$ 2, 5980; d. i. in dem Innhalte des Sechseckes steckt das Quadrat des Halbmessers $=$ I, zweymahl, und noch $\frac{598}{1000}$ dieses Quadrats. Wäre also der Halbmesser $=$ I° so hielte das Sechseck 2° 59′ 80″ Quadratmaaß (8. Zus.).

18. Zus. Ein Trapezium ABCD 97. F. von dem zwo Seiten AD, BC, gleichlaufend sind auszurechnen; theile man es durch BD in zwey Dreyecke; so ist ΔABD $=$ BE. $\frac{1}{2}$ AD; und

$\Delta BCD = DF. \frac{1}{2} BC$, wenn BE, DF Perpendikel auf die beyden gegenüberstehenden Seiten AD, BC, sind; Aber diese Perpendikel sind gleich (12. S. 2. Zus.) also ist die Summe beyder Dreyecke oder das Trapezium $= \frac{BE\,(AD+BC).}{2}$

19. Zus. Eine Figur ABCDEfb 98. F. noch bequemer als nach dem 16. Zus. auszurechnen, ziehe man durch sie nach Gefallen eine Linie etwa durch zweene Winkel AE, und setze auf solche durch alle Winkel der Figur Perpendikel Bb, Cc, Dd, u. s. f. so geben sich an den Enden Dreyecke, wie ABb, in der Mitten aber Trapezia BbCc die man bequem ausrechnen kann, weil man nur den Abstand der beyden Seiten Bb, Cc, auf AE zu messen, und mit $\frac{1}{2}$. (Bb + Cc) zu multipliciren braucht, also der Mühe, viel Perpendikel zu ziehen, (16. Z.) überhoben ist, da sich die Perpendikel auf AE, als Parallellinien durch verschiedene Handgriffe geschwinde ziehen lassen. Die Trapezia addirt man nach diesem zusammen.

Ex. Es sey die Einheit ein Fuß und die Stücken der Linie AE die zwischen A und Bb; zwischen Bb und Cc, zwischen Cc und Ff, zwischen Ff und Mm, fallen, seyn nach dieser Ordnung, 7; 2; 3; 5; Ferner sey Bb = 4;

Cc

Cc = 5; Ff = 6; Mm = 9; so ist ΔABb = 7. 2 = 14

BbCc = $\frac{4+5}{2}$. 2 = 9

CcfF = $\frac{5+6}{2}$. 3 = $\frac{11.3}{2}$ = 16, 5

fFmM = $\frac{6+9}{2}$. 5 = = 37, 5

das Stück ABCFMmfcbA = 77

20. Zus. Giebt es unter den Gränzen der Figur krumme Linien wie fmdnE, so nehme man darauf Puncte f, m, d, n, so nahe beysammen, daß die Krümmung unmerklich wird, welches hie allezeit kann angenommen werden, da nur von der Ausübung und dem, was in die Sinne fällt, die Rede ist.

1. Anm. So läßt sich ein Feld, das in Grund gelegt ist (40. S.) ausrechnen. Dieses Verfahren hat Philipp. Naudaeus Misc. Berol. Contin. II. p. 250. seqq. erläutert. Man könnte es auch wohl mit dienlichen Werkzeugen auf dem Felde selbst vornehmen. Sonst aber läßt sich ein Feld, ohne daß man eine Zeichnung davon machen darf, durch die Zerlegung in Dreyecke (16. Zus.) ausrechnen, wenn man die Seiten und die Diagonalen alle gemessen hat, und den Innhalt eines Dreyecks aus seinen drey Seiten zu berechnen weiß, welche Regel sich durch die Algebra leicht finden läßt, und in der ausübenden Geometrie von grossem Nutzen ist. Man sehe unten die Trigonometrie 21. Satz.

2. Anm.

Digitized by Google

2. Anm. Weil man alle Figuren durch Quadrate ausrechnen, (42. S.) und in Quadrate verwandeln kann, (14. S. 7. Z. und 31. S. und 42. S. 12. Z.) so nennt man die Erfindung des Innhalts einer Fläche ihre Quadratur. Besonders ist dieser Nahme vom Kreise, und krummlinichten Flächen gewöhnlich.

21. Zus. Aehnliche Dreyecke ABC; abc; 45. F. verhalten sich wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten. Denn man ziehe ihre Höhen BD; bd; so ist $\Delta ABC : \Delta abc = BD . AC : bd . ac$ (15. Z.) aber $\Delta ABD \sim \Delta abd$; (26. S.) also $BD : bd = AB : ab$ Ferner $AB : ab = AC : ac$ also $BD : bd = AC : ac$ oder $BD = \frac{bd . AC}{ac}$ (Ar. V. 35.) folglich $\Delta ABC : \Delta abc = \frac{bd . AC}{ac} . AC : bd . ac = AC . AC : ac . ac$ oder wie die Quadrate der Seiten AC; ac; aber weil $AC : ac = AB : ab = BC : bc$ so ist (aus Ar. V. 50.) die Verhältniß der Dreyecke, mit der Verhältniß der Quadrate jeder zwo ähnlichliegenden Seiten einerley. (Triangula similia sunt in ratione duplicata laterum homologorum). (Ar. VI. 7.).

22. Zus. Aehnliche Figuren, verhalten sich wie die Quadrate ähnlichliegender Seiten. Sie lassen sich (39. S. 1. Zus. 93. F.) in ähnliche Dreyecke theilen. Also ist

$\Delta AED : \Delta aed = AEq : aeq$
$\Delta ADB : \Delta adb = ABq : abq$
$\Delta BDC : \Delta bdc = BCq : bcq$ Da

Digitized by Google

Da nun die Verhältnisse der Seiten der Figuren wegen ihrer Aehnlichkeit einerley sind; und auch die Verhältnisse der Quadrate dieser Seiten wegen Ar. V. 50. einerley sind; so sind die Verhältnisse aller dieser Dreyecke einerley, oder es ist $\triangle AED : \triangle aed = \triangle ADB : \triangle adb = \triangle BDC : \triangle bdc$ also die Summe aller vorhergehenden Glieder zu der Summe aller folgenden $= \triangle AED : \triangle aed$ (Ar. V. 34.) $=$ AEq: aeq; aber die Summe aller vorhergehenden ist die eine Figur, und die Summe aller folgenden die andere; also ABCDE: abcde $=$ AEq: aeq; wo man aus der schon angegebenen Ursache, statt der letzten Verhältniß die Verhältniß der Quadrate von jeden zwo andern ähnlichliegenden Seiten nehmen kann.

23. Fus. Linien, die in zwo ähnlichen Figuren auf ähnliche Art bestimmt werden, verhalten sich wie die ähnlichliegende Seiten; z. E. DB: db $=$ BA: ba 93. F. oder fc: FC $=$ cd: CD 92. F. also verhalten sich ähnliche Figuren auch wie die Quadrate solcher Linien, die in ihnen auf ähnliche Art bestimmt oder gezogen werden, wenn es gleich nicht Seiten sind. So verhalten sich ähnliche Dreyecke 45. F. wie die Quadrate ihrer Höhen.

24. Fus. Wenn von einem Dreyecke ACD 56. F. der Inhalt und die Grundlinie gegeben wird, so kann man die Höhe finden. Es sey der Inhalt $= p$ so ist $\frac{Aa. CD}{2} = p$ (15. 3.)

also Aa = 2p : CD. Dieses bestimmt aber nicht ein gewisses Dreyeck, sondern nur eine gerade Linie AE in welcher die Spitzen aller Dreyecke liegen, welche die gegebene Grundlinie, und den gegebenen Innhalt haben; (14. S. 2. Z.) einen Ort (locum geometricum) dieser Spitzen. Dieß ist also ein Beyspiel einer unbestimmten Aufgabe, (problema indeterminatum) die nicht eine, oder etliche Auflösungen von bestimmter Anzahl, sondern unzählich viel zuläßt.

25. Zus. Dieses dient zur Theilung der Figuren. Wenn man eine Figur 99. F. in eine Menge gleicher Theile theilen soll, so rechne man sie erstlich aus; (16. Z.) und dividire den gefundenen Innhalt mit der Zahl der Theile. Den Quotienten vergleiche man mit dem äuserſten Dreyecke der Figur, ABE; gesetzt dieses sey kleiner, so ziehe man es von dem Quotienten ab, und sehe den Unterschied, als den Innhalt eines Dreyecks an, dessen Grundlinie BE ist. Man finde also seine Höhe LM (24. Z.). In dieser Weite ziehe man mit BE eine Parallele, wo solche, wie bey N in eine Seite der Figur einschneidet, da fällt die Spitze des gesuchten Dreyecks BNE hin. Giebt es noch einen Einschnitt wie bey O, so könnte das Dreyeck nach BOE seyn, daher man die bequemste Lage wählen kann.

Exem-

Digitized by Google

Exempel. Die Figur halte 12867 □′ und soll halbirt werden. So ist ihre Hälfte 643350 □″

Es sey $\Delta ABE = 527300$

Innhalt des gesuchten Dreyecks $= 160050$ □″

Es sey eine Grundlinie $BE = 7200'$

so ist $\frac{116005.2}{7200} = \frac{116050}{3600} = 32'' \frac{17}{72} = LM$

also $\Delta BNE = \frac{LM.BE}{2} = 116050$ □″

So wäre ABNE die eine Hälfte der Figur, NEDC die andere. Sollte man mehr Theile machen, so müsste das folgende Stücke eben so wie das erste gefunden werden.

Anm. Die Theilung der Figuren lässt sich bey mancherley Gestalten wegen, die vorkommen, nicht wohl in allgemeine Regeln einschliessen. Auch werden öfters Umstände vorgeschrieben, deren Erfüllung einige Scharfsinnigkeit in Anwendung der bisherigen Lehren erfodert. Ein leichtes Beyspiel hievon ist 100. F. Ein Parallelogramm so zu halbiren, daß die Theilungslinie durch einen gegebenen Punct E in der Seite DC gehet. Hie nehme man nur $BF = DE$, und zihe EF. Der Beweis fliesst leicht aus 18. 3. EQ sey die Weite der Seiten DC; AB, so ist Trapez $DEFA = \frac{1}{2} EQ\ (DE + AF)$; aber $AF = AB - BF = DC - DE$ aber weil $DC = AB$ und vermöge der Verzeichnung $DE = BF$, so ist $AF = EC$ oder $DE + AF = BF + EC$, welches letztere mit eben der $\frac{1}{2} EQ$ multiplicirt $=$ Trap. EFBC. Etwas schwerere Fälle kommen in Schriftstellern von der practischen Geometrie, als beym Schwenter I. Tract. 7. B. und

und beym Ozanam de la diviſion des champs vor. Hr. Prof. Lowitz hat in einer in der Kön. Gött. Geſ. der W. im November 1757. gehaltenen Vorleſung gewieſen, wie man dergleichen Theilungen auf dem Felde unmittelbar blos mit der Meßkette ohne Werkzeuge und Zeichnungen verrichten ſoll, welches zur Richtigkeit der Arbeit ſehr dienlich iſt, und ſich durch algebraiſche Formeln bewerkſtelligen läſſt.

43. Satz. Aufgabe.

Wenn der Halbmeſſer EA 63. F. und die Seite AB eines ordentlichen Vielecks gegeben ſind, die Seite des Vielecks, das noch einmahl ſo viel Seiten hat, Al zu finden.

Auflöſ. $EF = \sqrt{(EAq - AFq)}$ (15. S.) iſt gegeben, da $AFq = \frac{1}{4} ABq$; Wenn man alſo EF von $El = EA$ abzieht, ſo iſt Fl gegeben; und folglich $Al = \sqrt{(AFq + Flq)}$.

Es ſey $EA = r$, $AB = f$ ſo iſt $EFq = r^2 - \frac{1}{4} f^2$; und $Fl = r - EF$; alſo $Alq = \frac{1}{4} f^2 + (r - EF)^2 = \frac{1}{4} f^2 + r^2 - 2r. EF + EF^2 = \frac{1}{4} f^2 + r^2 - 2. EF + r^2 - \frac{1}{4} f^2$ folglich $Al = \sqrt{(2r^2 - 2r. EF)}$.

Ex. Wenn (23. S. 6. Z.) $f = r = 1$ ſo iſt $EFq = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ alſo $EF = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (Ar. I. 77.) folglich die Seite des Zwölfecks $= \sqrt{(2 - \sqrt{3})}$ Nun iſt $\sqrt{3} = 1{,}732051$ (Ar. IIII. 27.) alſo die Seite des Zwölfecks $= \sqrt{0{,}267949} = 0{,}517$. Wollte man ſie in noch kleinern Theilen des Halbmeſſers haben, ſo müſſte man $\sqrt{3}$ wei-

Digitized by Google

weiter ausgezogen haben, so würde sie genauer 0,51764.

1. Zus. Wenn f die Seite eines Vielecks von n Seiten gewesen ist, und man also daraus die Seite des Vielecks von 2n Seiten gefunden hat, so setze man nun diese in dem Ausdrucke $\sqrt{(2r^2 - 2r.EF)}$ wo $EF = \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}f^2)}$ an die Stelle von f; so findet man aus ihr die Seite des Vielecks von 4n Seiten, und diese statt f gebraucht, giebt die Seite des Vielecks von 8n Seiten, und so kann man ohne Ende fortgehen.

So findet sich aus dem Zwölfecke das 24 Eck: aus diesem das 48 Eck u. s. w.

2. Zus. Je kleiner f ist, desto weniger ist EF von r unterschieden. Man kann aber nach diesem Satze allezeit ein f finden, das kleiner ist als jede gegebene Länge, und folglich ein Vieleck, für welches EF weniger von r unterschieden ist, als jeder gegebene Unterschied beträgt.

Ex. So sey für das Zwölfeck $f = 0,517$ und $\frac{1}{2}f = 0,2585$ und $\frac{1}{4}f^2 = 0,06682225$ also $1 - \frac{1}{4}f^2 = 0,93317775$ daraus die Wurzel gezogen, das Perpendikel des Zwölfecks $= 0,966$ giebt. Es ist aber etwas zu groß, weil man f zu klein angenommen. Genauer ist es 0,96592.

3. Zus. Die Seiten (1. Z.) werden (41. S.) Sehnen, die ihren Bogen immer näher kommen. Wenn also g, h, i, k, die Seiten der Vielecke

von n, 2n, 4n, 8n, Seiten sind; so ist 2n. h weniger von dem Umfange des Kreises unterschieden als n. g und 4n. i weniger als 2n. h; und 8n. k weniger als 4n. i und so geht diese Näherung ohne Ende fort, daß man allemahl ein Vieleck finden kann, dessen Umfang von dem Umfange des Kreises weniger unterschieden ist, als jede gegebene Grösse (41. S. 2. Z.). Ein Vieleck von sehr vielen Seiten wird also dem Umfange des Kreises sehr nahe kommen, und eines von mehr Seiten noch näher, u. s. w. daß man also hie einen Weg siehet, wie der Umfang des Kreises durch eine Näherung ausgedruckt werden kann.

4. Zus. I. Ich halte die bisherige allgemeine Vorstellung, wie man Umfang und dann nach 41. S. 4. Z. Fläche des Kreises findet, Anfängern für zulänglich. Indessen wird es doch nicht undienlich seyn, eine kurze Nachricht zu geben wie sich Archimed hiebey verhalten hat, von dem diese Untersuchungen zuerst glücklich sind angestellt worden. Sein Buch von der Kreis- und Scheibenmessung findet man griechisch in Wallisii Op. Vol. 3. Er nimmt darinn Gründe aus dem Anfange seines ersten Buchs von Kugel und Cylinder an. Ich bediene mich hie der deutschen Uebersetzung, die Joh. Christoph Sturm Prof. der Phys. und Math. zu Altdorf, unter dem Titel: Des unvergleichlichen Archimedis Kunstbücher ꝛc. herausgegeben hat. Nürnberg 1670. fol. Weil

ich

Digitized by Google

ich nur das vornehmste von Archimeds Verfahren erzählen, nicht vollständig ausführen will, so will ich mich hiebey auf einige Figuren meines Buchs beziehen, die zur Erläuterung zulänglich seyn werden, ob sie gleich in dieser Absicht nicht gezeichnet waren.

II. Im ersten Buche von Kugel und Rundsäule (wie Sturm den Titel verdeutscht) nimmt A. als den dritten Grundsatz folgendes an; Wenn ein paar krumme Linien, oder ein paar Züge die aus geraden oder geraden und krummen Linien zusammengesetzt, beyde nach einer Seite hohl sind, und einerley Endpuncte haben, so ist der Weg vom Anfangspuncte bis zum Endpuncte kürzer, der innerhalb des andern enthalten ist, es sey nun, daß beyde Züge nichts weiter als die Gränzpuncte, oder daß sie auch ausser denselben etliche Theile mit einander gemein haben.

III. Der Satz ist für einen Grundsatz ziemlich weitläuftig. Der einfachste Fall von ihm ist, was Geom. 9. S. 9. Zus. bewiesen wird, daß dorten $BD + DC < BA + AC$. Man kann also leicht denken, daß der allgemeine Satz wohl einen Beweis bedürfen möchte. In der That hat Eutokius von Askalon, Beweise davon zu geben gesucht, die man beym Sturm findet. Barrow; Archim. opera; nova meth. illustrata et succincte demonstrata Lond. 1675. nimmt ihn ohne Beweis an, erinnert aber daß

Digitized by Google

ihn ältere Ausgeber nicht einmahl verstanden hätten.

IIII. Zunächst zu gegenwärtiger Absicht gehört der Satz unter folgender Gestalt. MA, MI, 95. Fig. sind ein paar Tangenten des Kreises aus einem Puncte. Da ist nach Archimeds Grundsatze, der Bogen AI kleiner als die Summe dieser beyden Tangenten.

V. Auf der Tangente MI; nehme man IN = IM = MA; Wenn man sich vom Mittelpuncte E nach M, N, gerade Linien vorstellt, so fällt zwischen sie ein Bogen des Kreises, so groß als der Bogen AI. Denn beyde Bogen haben das Stück das zwischen EM, EI, fällt gemein, und der Bogen zwischen EM, EA, ist so groß als der zwischen EI; EN.

VI. Nun setze man, der Winkel MEN, sey so groß, daß er mit einer ganzen Zahl multiplicirt, vier Rechte giebt, oder, welches eben das ist, sein Maaß, der Bogen zwischen EM, EN; sey nach einer ganzen Zahl in 360° enthalten. So ist MN die Seite eines ordentlichen Vielecks, das um den Kreis beschrieben ist, z. E. eines Sechsecks, wenn der Winkel MEN = 60°.

VII. Also: MN die Seite eines ordentlichen Vielecks das um den Kreis beschrieben ist, ist länger, als der ihr zugehörige Bogen, den Linien NE, ME, von ihrem Endpuncte nach dem Mittelpuncte gezogen abschneiden; den man erhält, wenn man den Umfang des Kreises in so viel

Digitized by Google

viel Theile theilt, so viel Seiten das umschriebene Vieleck hat.

VIII. Dieser Bogen aber, hat zu seiner Sehne die Seite des ordentlichen Vielecks im Kreise, das eben soviel Seiten hat als das umschriebene. Und länger als diese Sehne ist er gewiß; also länger als die Seite des in den Kreis, kürzer als die Seite des um den Kreis beschriebenen Vielecks.

VIIII. Folglich ist des Kreises Umfang, länger als der Umfang des in ihn beschriebenen; kürzer als der Umfang des um ihn beschriebenen Vielecks.

X. Daß des Kreises Fläche, grösser ist als die Fläche des innern, kleiner als des äusern Vielecks Fläche, ist auch offenbahr.

XI. So giebt Archimed, für Umfang und Fläche des Kreises, Gränzen an, zwischen welche jedes der beyden fällt. Nun zeigt er wie man diese Gränzen einander näher und näher bringt, so den Umfang genauer und genauer ausdruckt, und die Fläche angiebt. Dieses will ich lieber in den jetzo gewöhnlichern Abkürzungen solcher Schlüsse weisen.

XII. In der Trigonometrie 1. Fig. sey DF die Seite eines ordentlichen Vielecks das in den Kreis beschrieben ist, Gg die Seite des ähnlichen umschriebenen. So ist

Gg: DF = CG: CD für die Verhältniß der Seiten, oder der Umfänge beyder Vielecke.

Digitized by Google

$\Delta GCg : \Delta DCF = CG^2 : CD^2$, (41. S. 21. Zus.) für die Verhältniß der Dreyecke in die jedes Vieleck getheilt wird, oder für die Verhältniß der Fläche der Vielecke.

Man kann auch die erste Verhältniß durch CA : CE; die zweyte durch die Verhältniß der Quadrate dieser beyden Linien angeben.

So berechnet man leicht Umfang und Fläche des äusern Vielecks, aus Umfang und Fläche des innern.

XIII. Je mehr und folglich kleinere Seiten jedes dieser Vielecke bekömmt, desto näher kommen die Verhältnisse ihrer Umfänge und ihrer Flächen, der Verhältniß 1 : 1. Und diese Näherung kann man so weit man will treiben, weil CE : CA oder CD : CG der Verhältniß 1 : 1 so nahe kommen können als man will. So findet man für Umfang und Fläche des Kreises, Gränzen, die immer näher und näher, und so nahe man will bey einander fallen.

XIIII. Wenn $CA = r$; $CE = q$; des innern Vielecks Umfang $= z$; so ist des äusern seiner $= \frac{rz}{q}$ den ich Z nennen will. Zwischen beyde fällt des Kreises Umfang. Und $\frac{r}{q}$ kann so nahe an 1 kommen als man will. Also der innere Umfang dem äusern so nahe als man will. Folglich des Kreises Umfange so nahe

als

als man will, wie schon 41. S. 2. Zus. gewiesen worden.

XV. Aus 23. S. 10. Z. erhellt daß des innern Vielecks Fläche $= \frac{1}{2} qz$; des äusern seine $= \frac{1}{2} r. Z$ ist. Diese durch jene dividirt, giebt $\frac{r^2}{q^2}$ welche der Einheit so nahe kommen kann als man will.

XVI. Die Fläche des Kreises fällt zwischen diese beyden. Wenn man sie also mit der Fläche des innern Vielecks dividirt, so muß der Quotient der 1 so nahe kommen können als man will, und eben so, wenn man mit ihr die Fläche des äusern dividirt, oder auch, wenn man die Kreisfläche mit der Fläche des äusern dividirt.

XVII. Des Kreises Umfang heisse t; seine Fläche wird weder grösser noch kleiner seyn können als $\frac{1}{2} r. t.$

XVIII. Man nehme an sie sey grösser $= \frac{1}{2} r. (t+x)$. So giebt sie mit der Fläche des innern Vielecks dividirt, den Quotienten $\frac{r.(t+x)}{qz}$

$= \frac{rt}{qz} + \frac{rx}{qz}$.

Der erste Theil hievon kann so nahe als man will an 1 kommen. Ist aber im zweyten Theile x eine Grösse die sich mit z vergleichen läßt, so hat dieser zweyte Theil allemahl eine Grösse die sich angeben läßt, beyde zusammen, betragen also

immer etwas das sich von 1 unterscheiden läßt, oder dieser Quotient kann der 1 nicht so nahe kommen als man will, wie er doch nach XVI soll.

XVIIII. Die Kreisfläche sey kleiner als XVII sagt, nähmlich $= \frac{1}{2} r. (t-y)$. So giebt sie mit der Fläche des äusern Vielecks dividirt $\frac{t-y}{Z} = \frac{t}{Z} - \frac{y}{Z}$ einen Quotienten von dem der erste Theil der 1 so nahe kommen kann, als man will, wenn man aber auch diesen Theil selbst $= 1$ setzte so würde doch das Ganze das aus beyden Theilen besteht, um etwas das sich angeben läßt kleiner als 1 seyn, wofern y eine Grösse ist die mit Z in Vergleichung kömmt. Wofern also y eine solche Grösse ist, so kann der Quotient nicht so nahe als man will an 1 kommen, welches doch XVI. fodert.

XX. So erhellt, daß weder x noch y Grössen seyn können die sich mit den Umfängen der Vielecke oder des Kreises vergleichen lassen, daß folglich des Kreises Fläche, um nichts das sich angeben läßt, grösser oder kleiner seyn kann, als $\frac{1}{2} r. t.$

XXI. Solchergestalt ist die Berechnung der Kreisfläche, darauf gebracht, die Verhältniß des Durchmessers zum Umfange zu finden. Weiß man diese, so kann man aus dem gegebenen Durchmesser den Umfang berechnen und nun die Fläche.

XXII.

Digitized by Google

XXII. Archimeds Berechnung schränkt den Umfang des Kreises zwischen die Umfänge zweyer Sechsundneunzigecke ein. Daraus findet er, der Umkreis enthalte den Durchmesser dreymahl, und noch ein Stückchen des Durchmessers, das kleiner als $\frac{1}{7}$ grösser als $\frac{10}{71}$ des Durchmessers ist.

Oder; den Durchmesser = 1 gesetzt, ist der Umkreis kleiner als $3\frac{1}{7}$; grösser als $3\frac{10}{71}$.

Oder; die Verhältniß des Durchmessers zum Umfange, fällt zwischen die Verhältnisse 7: 22 und 71: 223; die erste giebt den Umfang etwas zu groß, die zweyte etwas zu klein.

XXIII. Weil man nun gern mit der Verhältniß rechnet die sich durch die kleinsten Zahlen ausdrucken lässt, so hat man immer 7: 22 als die archimedische gebraucht, und manche Schriftsteller, besonders die sich für Practicos halten, ohne zu wissen wieviel Theorie zu einer richtigen Praxis gehöre, bleiben immer noch bey dieser Verhältniß, in der Meynung sie sey zu ihrer Praxis scharf genug.

Anm. Der Weg den Archimed bey seiner Berechnung gehen mußte, ist ungemein mühsam und weitläuftig, weil man immer Quadratwurzeln aus Quadratwurzeln u. s. w. ausziehen muß. Christian Huygens in seiner Schrift de circuli magnitudine inventa, (Leid. 1654.) hat ihn abzukürzen gesucht, und gewiesen, wie man mit Vielecken von wenigen Seiten den Umfang des Kreises so genau bestimmen kann, als sonst mit welchen von mehr Seiten. Vor Bekanntmachung dieses Vortheils aber hat schon Ludolph

dolph von Cöln den Umfang des Kreises sehr genau gesucht und gefunden, daß wenn der Durchmesser = 1 gesetzt wird, der Umfang grösser ist als 3, 141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 50 aber kleiner als diese Zahl, wenn die letzte Zifer in 1 verwandelt wird. (Arithmetische en Geom. fondamenten 163. Seite Leid. 1616. Man sehe auch sein Buch de circulo et adscriptis c. 10. Leid. 1619). Die Rechnung des Unendlichen lehrt den Umfang des Kreises bequemer und noch genauer finden, auserdem aber, daß ihre Gründe hie nicht können vorausgesetzt werden, so beruhen selbige selbst auf den gegenwärtigen Betrachtungen. Am weitesten hat Lagny durch Kunstgriffe, die Euler Comm. Petrop. T. VIII. p. 223. noch verborgen nennt, den Umfang gesucht, nähmlich auf 127 Decimalstellen. Mem. de l'Ac. des Sc. 1719; p. 188. des holl. Dr. Zur Ausübung braucht man sie nie so weit, als Ludolph von Cöln sie gefunden hat. Man nimmt von seinen Zifern insgemein nur die ersten. Z. E. die 3, 14 setzen zum Voraus, daß man den Umfang nur bis auf Hunderttheile des Durchmessers suche; also nimmt man an, der Umfang sey 314 wenn der Durchmesser 100 ist, und wirft kleinre Theile des Durchmessers weg. In diesem Verstande sagt man, der Durchmesser verhalte sich zum Umfange wie 100: 314. welche Verhältniß am gemeinsten ist. Will man auch Tausendtheile in Betrachtung ziehen, so wird die Verhältniß = 1000: 3141, für Zehntausendtheile 10000: 31415. für Hunderttausendtheile 314159. u. s. w. Man kann also den Umfang so scharf ausdrucken als es eine gewisse Absicht bey der Ausübung erfodert. Man braucht zuweilen auch des Metius Verhältniß des Durchmessers zum Umkreise 113: 355. welche so viel als 1: 3, 1415929.... folglich auf sechs Decimalstellen richtig ist. Die Verhältniß 7: 22 ist = 1: 3, 1428... also der 100: 314 gleichgültig.

Digitized by Google

44. Satz. Aufgabe.

Wenn der Durchmesser eines Kreises (=d) gegeben ist; seinen Umfang (=p) und seinen Innhalt (=a) zu finden.

Auflös. Man nehme von den Zahlen der Anm. des 43. S. so viel als die vorgesetzte Schärfe erfodert; und suche nach der Regel Detri den Umfang. Dieser mit dem halben Halbmesser, oder des Durchmessers viertem Theile multiplicirt, giebt den Innhalt (41. S. 4. Z. und 42. S. 15. Z.). Oder wenn statt der Verhältniß der Anm. des 43. S. überhaupt 1 : P gesetzt wird, so ist des Kreises der d zum Durchmesser hat, sein Umfang p = d. P und sein Innhalt a = P. d. $\frac{d}{4} = \frac{P. d^2}{4}$ oder wenn sein Halbmesser r = $\frac{1}{2}$ d, so ist 1 : P = 2r : p und p = 2r. P, und a = 2r. P. $\frac{1}{2}$ r = r^2 P. Wo man P so weit als nöthig mit Zahlen ausdrucken kann.

Für den Durchmesser = 1; ist P die Länge von 360° in Decimaltheilen desselben ausgedruckt.

Es ist aber gewöhnlich der Halbmesser = 1 zu setzen, da ist P der Bogen von 180° in Decimaltheilen des Halbmessers. Dieser Bogen nähmlich ist = 3 Halbmesser + 0, 1 des Halbmessers u. s. w.

In der Folge kann man auch nachstehende Zahlen brauchen: $\frac{1}{2}$ P = 1, 570796326794896

$\frac{1}{4}$ P = 0, 785398163397448

Für

Für P, und daraus hergeleitete Zahlen am Ende von Schulzens Taschenbuche 1. Heft. Berlin 1782.

Exempel. War des ehernen Meeres Oberfläche ein Kreis, und sein Durchmesser $d = 10$ Ellen, so war sein Umfang $3,14159 . 10 = 31,4159$ Ellen. Die Fläche $= 3,14159 . \frac{100}{4} = \frac{314,159}{4} = 78,539$ Quadratellen.

Anm. Dieser Unterschied von dem Maasse, I B. der Kön. 7 C. 23; II B. der Chron. 4 C. 2. rührt ohne Zweifel daher, weil das eherne Meer keinen kreisförmigen Umfang gehabt hat. Man darf ihm nur die Gestalt eines Sechsecks geben, so kömmt das angegebene Maas vollkommen heraus. S. Wideb. Math. Bibl. Spec. IIII. Qu. XI. Schmidt Bibl. Math. 160. Nicolai de Symmetria maris aenei. disp. I. II. Vit. 1717. praef. Clausing. Nicolaus Fatio Duiller de Mari aeneo, bey Eduard Bertrand de mensuris et ponderibus antiquis Oxf. 1688. Leonh. Cph. Sturm, Mare aeneum Norib. 1710.

1. Zus. Wenn eines andern Kreises Durchmesser δ, Umfang π, Innhalt α ist, so ist $\pi = P\delta$ und $\alpha = \frac{\pi\delta}{4} = \frac{P\delta^2}{4}$; also $p : \pi = d : \delta$ und $a : \alpha = d : \delta^2$ d. i. zweener Kreise Umfänge verhalten sich wie die Durchmesser; und ihre Flächen wie die Quadrate der Durchmesser. Kreise sind nähmlich ähnliche Figuren, daß dieses aus 42. S. 23. Z. folgt.

2. Zus.

Digitized by Google

2. Zuſ. Die Summe zweener Kreiſe iſt $a + \alpha = \frac{P d^2}{4} + \frac{P \delta^2}{4} = \frac{1}{4} P.(d^2 + \delta^2) =$ einem Kreiſe, von dem der Durchmeſſer $= \sqrt{(d^2 + \delta^2)}$. Wenn alſo (60 F.) $AB = d$, $AC = \delta$ ſo iſt ein Kreis über BC ſo groß als die beyden Kreiſe über AB, AC, zuſammen (15. S.). Imgleichen ein Kreis über AC ſo groß als ein Kreis über BC weniger einem über AB.

Anm. Dieſes gilt wegen 42. S. 22. Z. von drey ähnlichen Figuren über AB, AC, BC.

3. Zuſ. Es iſt alſo $d^2 . \frac{1}{4} P$ oder $a = d^2 .$ 0, 785 398 163 397 44. Dieſes giebt die Verhältniß des Innhalts zum Quadrate des Durchmeſſers; es iſt nähmlich $a : d^2 = 0,785 : 1 = 785 : 1000$ oder $= 0,7853 : 1 = 7853 : 10000$ u. ſ. w.

4. Zuſ. Dieſes dient, den Innhalt eines Kreiſes aus dem Durchmeſſer zu berechnen, ohne daß man erſt den Umfang ſuchet.

Exempel. Es ſey eines Kreiſes Durchmeſſer $= 1000 = d$ ſo iſt ſein Innhalt $a = 1000000.$ 0, 785398 $= 785398$ Quadratfuß.

5. Zuſ. I. Iſt der Umfang p gegeben, ſo findet man den Durchmeſſer $d = \frac{p}{P} = \frac{p}{3,14159\ldots}$

Es iſt aber $\frac{1}{P} = 0,318309886183790671\ldots$

(wel-

(welche Rechnung der vormahlige geschickte Lehrer der Mathematik zu Schulpforte Hr. Hübsch Arithmet. Portens. III. Th. 116. §. mitgetheilet hat. Die letzte Zifer sollte beynahe 4 seyn). Also findet man gleich den Durchmesser d = p. 0, 318309886... u. $\frac{1}{4}$ d = p. 0,079577471545947.

II. Also, der Innhalt, allein durch den Umfang ausgedruckt ist $\frac{p^2}{4.P^2}$. $P = \frac{p^2}{4P}$ $= p^2.\ 0{,}0795....$

Dieses kömmt häufig in der Anwendung vor. Man misst z. E. den Umfang eines Baumes, einer Säule, den man als Kreisförmig ansieht, und berechnet daraus die Fläche des Querschnittes.

Exempel. Wenn man dem Umfange des Aequators 5400 Meilen giebt, so ist sein Durchmesser = 5400. 0,3183 = 1718, 82 Meilen. Und seine Fläche 291600. 0,079 ... Quadratmeilen.

6. Zus. Suchte man eines Kreises Durchmesser aus seinem Innhalte, so wäre $d^2 = \frac{4a}{p} = 4a.\ 0{,}3183...$ daraus man also die Quadratwurzel zieht um d zu bekommen.

Exempel. Wie groß ist eines Kreises Durchmesser, wenn seine Fläche gleich 1 □ o = 100 = 10000″ = a; Hie ist $d^2 = 4.3183{,}0988618379$ = 12732, 3954... woraus d = 1° 1′ 2″, 83 gefunden wird.

7.

Digitized by Google

7. Zus. I. Im Kreise 76. F. sey der Halbmesser $= r$; der Winkel FKD $= K$, welches eine Zahl von Graden, oder wenn den Winkel eine ganze Zahl von Graden nicht ausdruckt von Minuten oder Secunden u. s. w. bedeuten kann.

II. Des Kreises halber Umfang ist $= rP$ (44. S.) also $180° : K = rP :$ Bogen DF in Längenmasse. So ist $DF = r. P. \frac{K}{180°}$; Wo man bemerken muß daß der Divisor Grade bedeutet, also 180 mit 60 oder mit 60. 60 multiplicirt werden muß, nachdem K eine Menge von Minuten oder Secunden bedeutete.

III. Man kann $\frac{P. K}{180°}$ auch so ausdrucken $= \frac{P}{180}. K. 1° = \frac{P}{180. 60}. K. 1' = \frac{P}{180. 60. 60}. K. 1''$.

IIII. Wenn man also P mit angezeigten Zahlen dividirt, so bekömmt man die Grösse eines Grades, einer Minute, einer Secunde, in Decimaltheilen des Halbmessers weil P selbst, die Grösse von 180° in solchen Theilen ist.

Jede solche Grösse also, mit K multiplicirt, (II) giebt den Bogen in Decimaltheilen des Halbmessers.

Und das mit r multiplicirt, denselben in solchem Maasse, in welchem r gegeben ist.

V.

Digitized by Google

V. Es ist so

1 Grad = 0,0174532925 19 . . .
1 M = 0,0002908882 08 . . .
1 S = 0,0000048481 36 . . .

Begreiflich kann man, wenn es zu was dient so auf Tertien und noch weiter gehen.

VI. Exempel: Ein Bogen von 50°, wo K = 50 ist = 0,8726462 59. . . .

Gehört er einem Kreise dessen Halbmesser = 4 Fuß so ist seine Länge = 3,4906 58 50 36 Fuß.

VII. Weil es nur darauf ankömmt, $\frac{P.K}{180^{\circ}}$ (II) in Decimaltheilen des Halbmessers auszudrucken, so sind Tafeln brauchbar, welche dieses für jeden Bogen zeigen der etwa in Graden Minuten u. s. w. gegeben ist.

In: Practica des Landmessens . . . durch Joh. Sems, und Joh. Pieterß Dou . . . in niederländischer Sprach . . . . . in hochdeutsch gebracht durch Sebastianum Curtium . . . Amsterd. 1616. findet sich 115 u. f. S. eine Tafel, die unter andern Angaben, alle Bogen von 3 zu 3 Minuten, in Zehnmilliontheilen des Halbmessers enthält, bis 90 Grad. Will man einen Bogen wissen, den sie nicht unmittelbar angiebt, so darf man nur 1 Minute in solchen Theilen ausgedruckt, zu einem der Bogen welche sie angiebt addiren oder von einem abziehen.

Lam-

Digitized by Google

Lambert Zusätze zu den logarithmischen ... Tabellen; Tab. 23. und Schulze, Sammlung logarithmischer, trigonometrischer .... Tafeln II. B. 266. u. f. S. geben die Länge jeder Anzahl von Graden, Minuten, Secunden, daraus man also jeden Bogen zusammensetzen kann.

VIII. So wenn ein Bogen $50^\circ\ 12'\ 45''$ wäre, gäben diese Tafeln

$$50^\circ = 0,8726646 \ldots.$$
$$12' = 0,0034906$$
$$45'' = 0,0002181$$

Der Bogen $= 0,8763733$

VIIII. Wenn man nicht die kleinsten Theile verlangt, lassen sich Logarithmen brauchen; Es ist nähmlich $\log P = \log 180^\circ$ berechnet worden, und daraus findet durch Abzug der Logarithmen für 180 und 60; andere, so

$$\log 180^\circ = 0,4971499$$
$$\log 1^\circ = 0,2418774 - 2$$
$$\log 1' = 0,4637261 - 4$$
$$\log 1'' = 0,6855749 - 6$$

X. Vermittelst dieser Logarithmen, einen Bogen in Decimaltheilen des Halbmessers auszudrucken wäre am bequemsten, ihn zuerst in den kleinsten Einheiten, z. E. Minuten, Secunden anzugeben. Dazu dient eine Tafel welche ich in der Astronomischen Abhandl. II. Sammlung 4. Abhandl. 82 Seite gegeben habe. In ihrer Ermangelung multiplicirt man nur gehörig mit 60.

Digitized by Google

XI. So ist der Bogen (VIII) = 180765″

log 180765 = 5,2571144

log 1″ = 0,6855749 — 6

0,9426893 — 1

Giebt den Bogen in Decimaltheilen = 0,87637.

XII. Es liessen sich hiebey selbst Vortheile erdenken, die Rechnung mit geringer Mühe, schärfer zu führen. Z. E. man hat (44. S.) $\frac{1}{4}P = 45°$, also dürfte man nur für (VIII) noch 5° 12′ 45″ suchen, eine kleinere Zahl von Secunden = 18765. Aus log 18765 + log 1″ = 0,9589235 — 2 findet sich diese Zahl von Secunden in Decimaltheilen des Halbmessers = 0,090975 und so der Bogen (VIII) = 0,876373.

XIII. Der Ausschnitt FKD (13. Erkl.) verhält sich offenbar zur Fläche des ganzen oder des halben Kreises wie der Bogen FD zum ganzen oder halben Umfange, welches erhellt, wenn man sich den Umfang in gleiche Theile getheilt vorstellt, die den Bogen des Ausschnitts messen, und denen am Mittelpuncte gleiche Winkel zugehören, folglich gleiche kleine Ausschnitte, deren Menge im grössern FKD sich zur Menge im ganzen oder halben Kreise verhält, wie der Bogen FD zum ganzen oder halben Kreise. (Man sehe den 22. Satz.).

XIV.

Digitized by Google

XIV. Also ist Umfang: FD = Kreisfläche; Ausschnitte, folglich Ausschnitt $= r^2 . P . \frac{K}{360^\circ}$ $= \frac{1}{2} r^2 . \frac{P . K}{180^\circ}$ wo $r . \frac{P . K}{180^\circ}$ des Bogens DF Länge ist (IV; VII) der Ausschnitt also so groß ist als ein Dreyeck dessen gerade Grundlinie so lang wäre als der Bogen, die Höhe der Halbmesser, völlig mit der Ausrechnung des ganzen oder halben Kreises übereinstimmend.

Im Exempel (VI) wäre der Ausschnitt $= 2 . 3,490658 \ldots = 6,981316$ Quadratfuß.

XV. $\frac{P . K}{180^\circ}$ ist des Bogens welcher den Winkel K misst Länge in Decimaltheilen des Halbmessers, (VII) hat man also diese aus VII oder VIIII; so darf man sie nur mit $\frac{1}{2} r^2$ multipliciren.

Der Bogen (XI) sey mit $r = 7$ Fuß beschrieben. Man darf ihn also nur mit $\frac{1}{2} . 49 = 24,5$ multipliciren, wenn man des Ausschnitts den er begränzt Innhalt in Quadrotfussen verlangt.

Zum Logar. (XI) $= 0,9426893 - 1$
addirt log $24,5 = 1,3891661$

log des Ausschn. $= 1,3318554$
giebt ihn $= 21,471$ Quadratfuß.

8. Zus. I. In der 95. Fig. ist zwischen dem Bogen AB und dessen Sehne, ein Abschnitt

enthalten (13. Erkl.) deſſen Innhalt verlangt wird.

II. Daß bey gegebenen Halbmeſſer, Sehne und Winkel einander gegenſeitig beſtimmen, iſt klar. Wenn man in den beſchriebenen Kreis was für eine Sehne man will trägt, giebt ſich der Winkel am Mittelpuncte der ihr zugehört: Umgekehrt wenn man einen Winkel zeichnet, die Sehne.

III. Wie groß aber eines dieſer beyden wird, wenn das andre gegeben iſt, darüber läſſt ſich aus den bisherigen Lehren, noch nichts allgemeines ſagen. Nur weiß man, (23. S. 6. Zuſ.) daß Sehne dem Halbmeſſer gleich, und Winkel = 60 Gr. zuſammen gehören, auch, aus eben dem Satze und dem (15) Sehne deren Quadrat das Döppelte des Halbmeſſers iſt, und Winkel von 90 Gr. Aus dem 43. Satze, könnte man mehr Sehnen und Winkel die zuſammengehören berechnen.

IV. Das zeigt alſo wenigſtens einigermaſſen worauf es ankommen muß, wenn die Trigonometrie eine allgemeine Vergleichung dieſer Dinge giebt, ſo daß man aus jedem welches man annimmt, das andre berechnen kann.

V. Iſt dieſes noch nicht in der Gewalt des Lehrlings der Geometrie, ſo muß er ſich durch Meſſen helfen; miſſt etwa mit dem Transporteur den Winkel AEB, wenn er die Sehne AB nach Gefallen angenommen hat, oder, wenn er

den

Digitized by Google

den Winkel angenommen hat, die Sehne, nach einem Maaßstabe nach dem auch der Halbmesser gemessen ist.

VI. Wüsste man vom Bogen, Sehne AB und Höhe, oder wie es zuweilen ist genannt worden: Pfeil FI; aber den Halbmesser noch nicht, so wäre $FA^2 : FI = FD$ (31. S.) das zu FI addirt, gäbe den Durchmesser $ID = IA^2 : FI$ daß man also den Kreis beschreiben und den Winkel am Mittelpuncte finden.

VII. Im geradelinichten Dreyecke AEB ist die Höhe $EF = \sqrt{(AE^2 - AF^2)}$.

VIII. Man kann also dieses Dreyeck ausrechnen.

IX. Auch, nach vorigem Zusatze, den Ausschnitt AEB.

X. Von dem ziehe man das Dreyeck (VIII) ab; so bleibt der gesuchte Abschnitt.

XI. Exempel. Es sey Halbmesser $= 4$ Fuß, Winkel am Mittelpuncte $= 50$ Gr. (wie im vorigen Zusatze VI) also hat man den Ausschnitt (vor. Zus. XIV.).

XII. Da ist nun die Sehne $AB = 3{,}3809464$ Fuß, des Dreyecks Höhe $EF = 3{,}6252302$ Fuß; diese, mit der halben Sehne $= 1{,}6904732$ Fuß multiplicirt giebt den Innhalt $= 6{,}1283352$ Quadratfuß.

XIII. Also von $6{,}981316$ (XI)
abgezogen $6{,}128355$
Abschnitt $= 0{,}852961$ Quadratfuß.

Digitized by Google

XIIII. Begreiflich sind die Linien (XII) aus keiner Zeichnung abgenommen, die Trigonometrie giebt sie aus dem angenommenen Winkel, eine Zeichnung, selbst in natürlicher Grösse, gäbe jede höchstens bis auf Tausendtheile des Fusses. Auch die Multiplication dieser Zahlen habe ich nicht mit ihnen selbst verrichtet. Die Vorschrift für dieses Verfahren auf gegenwärtiges Exempel angewandt findet sich unten in der Trigonometrie 18. Satze. Kreisabschnitte zu berechnen, ist in der Ausübung wichtig, und man findet Tafeln dazu in Büchern von der praktischen Geometrie. Ob also Trigonometrie nöthig ist, ohne welche solche Rechnungen nicht können geführt werden, wird man hieraus leicht beurtheilen.

9. Zus. Wenn der Umfang eines Quadrates $= p$ also seine Seite $\frac{1}{4} p$ ist; so verhält sich sein Innhalt zum Innhalte des Kreises $= \frac{1}{16} p^2 : \frac{1}{4} pd = \frac{1}{4} p : d = a : d^2$ (3. Zus.).

1. Anm. Unter allen Figuren, die gleichen Umfang haben, hat der Kreis die grösste Fläche. Unter Figuren von gleichem Umfange hat die ordentliche mehr Fläche als die unordentliche, ja selbst die mehr, welche der ordentlichen näher kömmt (S. ein Exempel 42. S. 14. Z.) und die ordentliche von einer grössern Anzahl Seiten mehr als die von einer geringern. Die Beweise giebt Pappus Collect. Math. L. V. und nach ihm Clavius Geom. Pract. Lib. VII. und Comm. in Sphaer. Ió. de Sacrobosco cap. I.

2. Anm. Man kann also Fragen, wo es auf die Flächen der Figuren ankömmt, gar nicht aus ihrem Um-

Digitized by Google

Umfange entscheiden. Dieser kann wie im 14. S. ohne Ende wachsen, wenn jene ungeändert bleibt. Man sehe ein Exempel dieses Irrthums das eine hauswirthliche Regel seyn soll, in Beyers Märkscheidekunst 214. Seite. Grösser als ein Kreis der mit ihr einerley Umfang hat, kann eine Figur nicht seyn. Z. E. eine Stadt, deren Umfang eine Meile wäre, nicht grösser als 0,0795.... Quadratmeilen.

3. Anm. Die Quadratur des Kreises (42. S. 20. Z. 2. Anm.) ist ungemein viel schärfer entdeckt, als man zu allem Gebrauche in der Ausübung verlangen kann. In der Theorie könnte man noch suchen, ob sich die Verhältniß des Umfanges zum Durchmesser nicht durch ein paar bestimmte Zahlen vollkommen darstellen liesse. Vermuthlich ist diese Verhältniß irrational. Ich sage vermuthlich, denn Sturms Beweis davon Mathes. Enucl. L. I. §. 2. Prop. 43. ist noch einigem Zweifel unterworfen. Drückte man nun also gleich diese Verhältniß durch Irrational-Zahlen aus, so müsste man doch daraus zum Gebrauche eben die Näherungen herleiten, die man schon hat. Man wird also urtheilen, wie viel Einsicht diejenigen besitzen, welche die Quadratur des Kreises in der Einbildung suchen, sie würden dadurch grosse Vortheile für die ausübende Mathematik erfinden, und wohl gar eine Belohnung verdienen. In der höhern Mathematik verstehet man unter der **unbestimmten Quadratur** des Kreises noch etwas anders, dessen Unmöglichkeit erwiesen ist, welches man von der nur erwähnten doch nicht sagen kann. Das sicherste Mittel, solche angebliche Quadraturen zu prüfen, ist zu sehen, ob sie mit Ludolphs v. Cöln Verhältniß übereinstimmen. Da diese Verhältniß als eine Näherung erwiesen ist, so hat man das Recht, jede andere, die sich nicht mit ihr vergleichen lässt, ohne weitere Untersuchung für falsch zu erklären. Denn es finden sich noch immer von Zeit zu Zeit Leute,

te, die die Quadratur des Kreises wollen gefunden haben, ohne zu wissen was sie damit gefunden hätten. So ward im Mercure de France May 1762 gemeldet, "daß einer nach mehr als 25 jährigem Fleisse herausgebracht hätte der Durchmesser könnte sich wohl zum Umfange verhalten wie 23099: 7257 6,, das wäre wie 1: 3, 1419.. und weil sich diese beyden Dinge nicht so verhalten können, so hat der gute Mann seine mehr als 25 Jahr sehr übel angewandt. Diese Verwendung von Kräften und Zeit, und der anhaltende Eifer, gränzt bey den Cirkelquadrirern zunächst an Wahnwitz, und ich bin selbst in meinem Leben von mehr als einem Schocke solcher Unglücklichen die ihr Elend freylich nicht ganz fühlen, behelliget worden. Die pariser und die preussische Akademien der Wissenschaften haben bekannt gemacht daß sie keine Cirkelquadratur mehr annehmen.

Lambert vorläufige Kenntnisse für die so die Quadratur des Kreises suchen. Beyträge zum Gebrauch der Mathematik II. Th. I. Abschn.

Coriarius die Pseudoquadratur des Cirkels, Eutin 1766.

Die besser gerathenen Bemühungen den Kreis durch Näherung zu quadriren, erzählt Montucla, Histoire des Recherches sur la quadrature du cercle Par. 1754.

10. Zus. Der Innhalt des Ringes zwischen den beyden Kreisen um einen Mittelpunct K 68. F. findet sich so: Es sey KP = r, KQ = R, so ist der Umfang des einen Kreises = 2r. P und sein Innhalt = r^2 P; des äusern Innhalt = R^2. P und der Ring als beyder Unterschied = ($R^2 - r^2$). P; der Ausschnitt aus dem Ringe NPOQ wird sich zum ganzen verhalten wie NKQ: 360°.

11. Zus.

Digitized by Google

11. Zus. Wenn der beyden Kreise 76. F. ihre Halbmesser r, R, ihre Umkreise p, P, heissen, so ist GKD: 360 Gr. = DG: P und 360 Gr: fKd = p: df (22. S. 5. Z.) folglich GKD: fKd = DG. p: df. P. aber $p = \frac{r.P}{R}$ also GKD: fKd $= \frac{DG\ r.P}{R}$: df. P $= \frac{DG}{R}$: $\frac{df}{r}$; Oder die Verhältniß der Winkel ist aus der ordentlichen der Bogen, mit denen man sie misst, und der verkehrten der Halbmesser zusammengesetzt. Sind also die Winkel gleich, so verhalten sich die Bogen wie die Halbmesser.

Der Geometrie zweyter Theil.

Von den Lagen der Flächen, und den Körpern.

Erklärungen.

1. Eine Linie AB 101. F. steht auf einer Ebene FGHI senkrecht (recta est plano) wenn sie mit allen Linien BC, BD, BE, u. s. f. rechte Winkel macht, welche in dieser Ebene durch den Ort, wo sie in die Ebene eintrifft, gezogen werden.

Digitized by Google

Die Neigung einer Linie AC gegen eine Ebene FGHI oder ihr Winkel mit der Ebene, ist der Winkel, den sie mit einer andern Linie macht, die in der Ebene durch den Ort C wo sie in die Ebene eintrifft, nach dem Orte B gezogen wird, wo ein Perpendikel von einem willkührlichen Puncte der Linie AC, auf die Ebene herabgelassen, in diese Ebene eintrifft.

2. Die Neigung der Ebenen ABCD und FLKI gegen einander; 102. F. ist der Winkel zwischen zwo Linien GE, GH, die durch einen Punct G, des Durchschnitts beyder Flächen AB, jede in einer der beyden Ebenen, auf diesen Durchschnitt senkrecht gezogen werden. Also steht eine Ebene auf der andern senkrecht, wenn dieser Winkel ein rechter ist.

Gleichlaufende Ebenen sind, die nach allen Seiten erweitert nirgends zusammenstossen. Eine gerade Linie ist einer Ebene gleichlaufend, wenn beyde ohne Ende verlängert und erweitert nie zusammenstossen.

Zus. Gleichlaufender Ebenen Durchschnitte mit einer dritten Ebene sind gleichlaufend. Denn sie sind in einer Ebene, nähmlich in der dritten, und können nie zusammenstossen.

Anm. Zwoer Flächen Durchschnitt ist ihre gemeinschaftliche Gränze; also eine Linie (I. Th. 4. Erkl.) und bey zwo Ebenen eine gerade (das. 7.).

3. Ein körperlicher Winkel (ang. solidus) eine Ecke B 103. F. ist zwischen mehr als zwo

Digitized by Google

Linien, BA, BC, BD, deren nie mehr als zwo in einer Ebene liegen, an dem Puncte, wo sie alle zusammenstossen, enthalten.

Anm. Die verschiedenen ebenen Winkel, aus denen er bestehet, machen allemahl zusammen weniger als 4 R: diesen Satz, der Lehrsätze, die ich hie nicht beybringen werde, zu erweisen nöthig ist, findet sich beym Euklides XI. 21. nebst andern hieher gehörigen.

4. Ein Prisma (eine Eckſäule oder Pfeiler) ist der körperliche Raum, der zwischen zwo parallelen gleichen und ähnlichen Ebenen, die man Grundflächen (baſes) nennt, und zwischen soviel Parallelogrammen oder Seitenflächen als jede der Grundflächen Seiten hat, enthalten ist. Man unterscheidet sie nach der Zahl der Seitenflächen, so heisst ein dreyeckichtes, dessen Grundflächen Dreyecke sind. Sind die Grundflächen auch Parallelogrammen, so entstehet ein Parallelepipedum: Stehen die Seitenflächen auf die Grundflächen senkrecht, so heissen diese Körper senkrechte (recta) sonst schiefe.

5. Den körperlichen Raum einer Pyramide begränzen, eine Ebene als Grundfläche, und soviel Dreyecke als sie Seiten hat, die alle in einem Puncte auser ihr ihre gemeinschaftliche Spitze haben. Die Zahl der Seiten der Grundfläche, oder der Seitenflächen giebt der Pyramide den Nahmen, z. E. eine dreyeckichte ꝛc. Ist die Grundfläche ein Kreis, so heisst sie ein Kegel, dessen Axe eine Linie von der Spitze nach der Grundfläche Mittelpuncte ist. Steht

sie

sie auf der Grundfläche senkrecht, so heisst der Kegel senkrecht (rectus) sonst schief.

6. Der körperliche Raum einer Kugel (Sphaera) wird begränzet, indem sich ein halber Kreis um seinen Halbmesser als eine Axe drehet, bis er wieder in seine erste Lage kömmt. Die Fläche, welche von des Halbkreises Umfange bey dieser Umdrehung beschrieben wird, heisst die Kugelfläche.

Zus. Weil Axe und Mittelpunct des beschreibenden Kreises unbeweglich liegen bleiben, jeder Punct der Kugelfläche aber ein Punct in dem Umfange des Kreises ist, so sind alle Puncte der Kugelfläche von dem Mittelpuncte des Kreises gleich weit entfernt, welcher also auch der Kugel Mittelpunct, so wie des Kreises Halbmesser und Durchmesser auch der Kugel ihrer ist.

8. Ordentliche Körper heissen solche, die in lauter ordentliche gleiche Vielecke von einer Art, die gleiche und ähnliche Ecken (3. Erkl.) machen, eingeschlossen sind.

1. Anm. Man hat nur fünf dergleichen 1. der Würfel (hexaedrum, cubus) ein senkrechtes Parallelepipedum (4. Erkl.) das in lauter Quadrate eingeschlossen ist. 2. Tetraedrum; 3. Octaedrum; 4. Icosaedrum; 5. Dodecaedrum; Sie sind in 4; 8; 20; ordentliche Dreyecke, und in 12. ordentliche Fünfecke eingeschlossen. Die Kürze gegenwärtiger Anfangsgründe verstattet nicht, umständlicher von ihnen zu handeln.

2. Anm. Man pflegt Netze zu machen, oder die Seitenflächen geometrischer Körper auf eine Ebene

Digitized by Google

ne dergestalt zu verzeichnen, daß sie gehörig zusammengebogen den Körper einschliessen. Ihre Regeln lassen sich bey würklicher Vorweisung leichte begreifen. Die Beweise erfodern zum Theil Gründe, die hie nicht alle beygebracht werden können.

Grundsatz.

Eine gerade Linie, von welcher zween Puncte in einer Ebene sind, befindet sich ganz in dieser Ebene. (1. Th. 7. Erkl. und 1. Grundsatz.) Da aber die Ebene, in welcher diese gerade Linie ist, sich um sie als um eine Axe drehen kann, so bestimmen drey Puncte die Lage einer Ebene; und also ist jeder ebene Winkel, und jedes Dreyeck, in einer Ebene.

Anm. Dieses zeigt, warum eine Sache auf drey Füssen allemahl veste kann gesetzt werden, welches mit vier oder mehrern nicht so leicht angeht. Die hatten die Tische der Alten ordentlich drey Füsse. Sit mihi mensa tripes - - - Hor. Wagrecht stand deßwegen ein solcher Tisch nicht allemahl.

- - - mensae sed erat pes tertius impar
Testa parem fecit

Ou. Met. VIII; 661.

Von der Lage der Linien und Ebenen.

45. Satz. Lehrsatz.

Wenn die gerade Linie AB, auf zwo Linien BD, BE, 104. F. senkrecht stehet, so stehet sie auf jeder Linie GBH die durch B in der Ebene DBE (Gr.) gezogen wird, d. i. auf dieser Ebene (1. Erkl.) senkrecht. Bew.

Digitized by Google

Beyp. Man verlängere die beyden Linien bis BC = BD; BF = BE, und ziehe durch die vier Puncte F, C, E, D, die alle in der Ebene DBE liegen (Grundſ.) Linien, da denn die dritte willkührlich durch B gezogene Linie, FD, CE, in G, H, ſchneide. Von einem willkührlich angenommenen Puncte A in AB, ziehe man nach allen genannten Puncten Linien. Die Dreyecke, welche herauskommen, geben folgendes:

I) ΔFBD = ΔBCE (2. S.) alſo FD = CE; BFD = BEC; BDF = BCE.

II) ΔFBG = ΔEBH (1. und 3. S.) alſo FG = EH; BG = BH;

III) ΔADB = ΔACB (2. S.); AD = AC;

IIII) ΔAFB = ΔAEB (2. S.) AF = AE;

V) ΔAFD = ΔAEC (I. III. IIII. und 4. S.) alſo AFG = AEH.

VI) ΔAFG = ΔAEH (II. IIII. V. und 1. S.) alſo AG = AH.

VII) ΔABG = ΔABH (II. VI. und 4. S.) alſo ABG = ABH = R. w. z. E. w.

Zuſ. Wenn AB, auf BD, BE, BH, ſenkrecht ſteht, ſo ſind dieſe drey Linien in einer Ebene. Wären ſie es nicht, ſo würden die Ebenen ABH, DBE, einander in einer andern geraden Linie als BH z. E. Bh ſchneiden, die aber doch in der Ebene AEH ſeyn, und durch B gehen müſſte; auf Bh nun müſſte vermöge des Satzes; AB ſowohl ſenkrecht ſtehen als auf BH; (wieder 9. S. 4. Z.).

46.

Digitized by Google

46. Satz. Lehrsatz.

I. Wenn AB, CD, 105. F. beyde auf eine Ebene EF senkrecht stehen, so sind sie gleichlaufend; II. Wenn von zwo gleichlaufenden Linien eine AB, auf eine Ebene EF senkrecht stehet, so stehet die andere CD auf diese Ebene auch senkrecht.

Bew. I. Man ziehe BD, und auf sie in der Ebene EF, das Perpendikel DG = AB; so ist ΔABD = ΔGDB (2. S.) also AD = GB; und daher ΔAGB = ΔGAD (4. S.) folglich GDA = ABG = R = GDB = GDC (11. S. 1. Erkl.) und die Linien DC, DA, DB in einer Ebene (45. S. Zus.) in welcher auch AB ist (II. Th. Grundsz.). Also sind AB, DC, in einer Ebene, und stossen doch, weil ABD + BDC = 2 R nicht zusammen (11. S.) d. i. sie sind gleichlaufend.

II. Nach eben den Vorbereitungen erhält man GDA = R also GD auf die Ebene BDA senkrecht (45. Satz) und in eben der Ebene befindet sich auch die Parallele DC, also ist auch GDC = R aber weil ABD = R (II. Th. 1. Erkl.) so muß auch CDB = R seyn (12. S.) folglich steht CD auf BD und DG, d. i. auf die Ebene BDG (48. S.) senkrecht. 48.

1. Zus. Zwo Parallelen AB, CD, 106. F. mit einer dritten EF sind unter sich parallel, wenn gleich nicht alle drey in einer Ebene sind. Man

richt

richte durch G, auf EF, GH in der Ebene ABFE, und GI in der Ebene EFDC senkrecht auf, so sind HB, ID, auf die Ebene HGI senkrecht (46. S. II.) also unter sich gleichlaufend (46. S. I.).

2. Zus. Wenn die Winkel BAC, DEF, 107. F. nicht in einer Ebene, aber ihre Schenkel BA mit DE, und CA mit EF gleichlaufend sind, und beyder Schenkel nach einer Seite der Linie AE liegen, daß BAE, AED, und CAE, AEF, innere entgegengesetzte, nicht Wechselswinkel sind (11. S.) sind die Winkel gleich. Denn man nehme AB = ED; AC = EF, so sind DBAE; AEFC; Parallelogrammen (12. S.) und also BD = AE = CF; aber auch BD, CF, parallel (1. Z.) also BDFC ein Parallelogramm und BC = DF; folglich BAC = DEF (4. S.).

3. Zus. Von einem Puncte A in der Höhe; 108. F. wird auf die Ebene BC folgendermaassen ein Loth herabgelassen: Man ziehe in der Ebene nach Gefallen DE, und lasse da auf AF senkrecht (7. S.) ferner ziehe man durch F, auf DE in der Ebene FI senkrecht, worauf man aus A, AI senkrecht fallen lasse, diese wird auf die Ebene senkrecht stehen. Denn man ziehe durch I, KL mit DE gleichlaufend; DE steht auf FA, FI, vermöge der Verzeichnung, also auch auf der Ebene AFI (45. S.) und folglich KL auf eben dieser Ebene (46. S. II.) senkrecht. Also ist LIA = R (II. Th. 1. Erkl.) aber AIF = R

(Ver-

Digitized by Google

(Verzeichn.) also AI auf die Ebene FIL oder BC senkrecht (45. S.).

4. Zus. Aus einem gegebenen Puncte Q, auf die Ebene BC ein Loth aufzurichten, fälle man auf sie aus einem willkührlichen Puncte A das Loth AI (3. Z.) und ziehe damit durch Q, QS gleichlaufend (46. S. II.).

5. Zus. Aus einem Puncte A, fallen nicht zwey Lothe AF, AI, auf eine Ebene; sonst gäbe es in dem Dreyecke AFI zweene rechte Winkel (II. Th. 1. Erkl.). Eben so wenig können aus einem Puncte Q, zwey Lothe aufgerichtet werden, denn es giebt mit einer AI (3. Z. und 46. S. I.) nicht zwo Parallelen (12. S. 1. Z.) auch ist ein Loth die kürzeste Linie, die sich von einem Puncte bis an eine Ebene ziehen läßt (9. S. 10. Z.).

6. Zus. Wenn aus A ein Perpendikel AI auf die Ebene BC, und eines AF, auf die Linie DE in dieser Ebene fällt, so ist FI auf DE senkrecht. Denn sonst wird eine andere Linie durch F auf DE senkrecht, und ein Perpendikel aus A auf diese andere Linie, auf die Ebene nach 3. Zus. sowohl senkrecht seyn als AI, wieder den 5. Zus.

7. Zus. Wenn AI auf die Ebene BC, und IF auf DE in dieser Ebene senkrecht ist, so ist AF auf DE senkrecht. Denn sonst giebt es aus A ein anders Perpendikel auf DE; durch den Ort, wo selbiges in DE einschneidet, eine Linie

Digitized by Google

in der Ebene BC auf DE senkrecht aufgerichtet, ist mit FI gleichlaufend (11. S.) und ein Perpendikel auf diese senkrechte Linie aus A, auf die Ebene BC senkrecht (3. Zus.) sowohl als AI, wieder den 5. Zus.

8. Zus. Wenn BC von einer andern Ebene in DE geschnitten wird, so nehme man in dieser andern Ebene auserhalb des Durchschnittes, wo man will, einen Punct A an, und fälle von solchem auf BC das Loth AI; und auf den Durchschnitt das Perpendikel AF, so ist der Winkel IAF spitzig (9. S. 3. Z.) es ist also nicht möglich, daß einerley gerade Linie auf zwo Ebenen, die einander schneiden, zugleich senkrecht stünde, und wenn daher eine Linie auf zwo Ebenen zugleich senkrecht stehet, so sind dieselben parallel.

9. Zus. Durch einen gegebenen Punct A eine Ebene zu führen, die mit einer gegebenen Ebene BC parallel liegt, fälle man von A auf BC das Loth AI, und ziehe durch I in BC, nach Gefallen zwo Linien IL, IF, mit jeder derselben aber eine gleichlaufende durch A; diese beyden gleichlaufenden sind in einer Ebene (II. Th. Grundsf.) und stehen beyde auf IA senkrecht (12. S.) also steht IA auf der Ebene durch sie senkrecht (45. S.) und diese Ebene ist mit BC gleichlaufend (8. Zus.).

10. Zus. Eine Linie kann nicht in einem Puncte zugleich auf zwo Ebenen senkrecht seyn,

(8.

Digitized by Google

(8. Zuſ.) und durch einen Punct, geht mit einer Ebene, nur eine Ebene parallel (9. Z.) daher ſtehet eine Linie, die auf eine von zwo parallelen Ebenen ſenkrecht ſteht, auf der andern auch ſenkrecht (9. Z.).

47. Satz. Lehrſatz.

Wenn AI auf der Ebene BC ſenkrecht ſteht, ſo ſteht auf dieſer Ebene jede Ebene durch AI ſenkrecht.

Beweis. Eine ſolche Ebene ſchneide BC in KL; und man ſetze auf dieſen Durchſchnitt in BC das Perpendikel IF, ſo iſt beyder Ebenen Neigungswinkel (II. Th. 2. Erkl.) FIA = R (II. Th. 1. Erkl.).

1. Zuſ. Wenn die Ebene durch KL und A, auf der Ebene BC ſenkrecht ſteht, und in jener aus einem willkührlichen Puncte A, ein Perpendikel AI auf beyder Durchſchnitt KL gezogen wird, ſo ſteht ſolches auf BC ſenkrecht. Denn man ſetze in BC durch I auf KL das Perpendikel IF; weil AIL = R angenommen wird, ſo iſt AIF beyder Ebenen Neigungswinkel, alſo auch = R (II. Th. 2. Erkl.) und AI auf BC ſenkrecht (45. S.).

2. Zuſ. Ein Perpendikel aus A auf BC gefällt, iſt mit AI einerley, (46. S. 5. Z.) und liegt alſo in der ſenkrechten Ebene.

3. Zuſ. Wenn BC von einer ſenkrechten Ebene in KL geſchnitten wird, ſo ſteht jedes

Digitized by Google

Perpendikel, IA das man auf KL in der senkrechten Ebene aufrichtet, auf BC senkrecht, denn man ziehe IF auf KL in BC senkrecht, so ist FIA = R also folgen die Schlüsse wie im 2. Zus.

4. Zus. Der beyden Ebenen BC und DAE Durchschnitt DE, steht auf der Ebene ihres Neigungswinkels AFI senkrecht (II. Th. 2. Erkl. und 45. S.) also stehen beyde Ebenen auf der Ebene ihres Neigungswinkels, und diese auf jenen beyden senkrecht (47. S.).

5. Zus. Wenn die Ebenen dm; dl 114. F. und ADE, BC, 108. F. einerley Winkel mit einander machen, so kann man sie mit ihren gemeinschaftlichen Durchschnitten so an einander setzen, daß ADE mit dm und BC mit dl in eine Ebene fallen. Es seyen ihre Neigungswinkel AFI, afi; und man lege die Ebene dl so in die Ebene BC, daß de längst DE, f auf F fällt, so fällt fi längst FI; weil ife = R = IFE; ferner stehen die Ebenen afi; AFI, beyde also über FI oder fi, auf einer Ebene BC oder dl senkrecht (4. Zus.) und fallen also in eine Ebene; in welcher fa, FA auf einander fallen müssen, weil ifa = IFA.

6. Zus. Parallele Ebenen dm, kn, machen mit einer dritten Ebenen dl gleiche Neigungswinkel. Ihre Durchschnitte mit der dritten, seyn de; kl, Parallelen (II. Th. 2. Erkl. Z.) auf welche fi senkrecht stehe. Durch fi werde auf dl eine Ebene senkrecht gesetzt, welche dm

und

und kn, in den Parallelen (II. Th. 2. Erkl. 3.) fa; in; schneide, so ist afi = uio; aber diese beyden Winkel sind die Neigungswinkel (4. 3.).

7. Zus. Wenn die Ebenen dm, kn, eine dritte dl, in parallelen Linien de, kl, schneiden, und mit ihr, nach einer Seite zu, gleiche Neigungswinkel machen, so sind sie parallel. Denn von einem willkührlichen Puncte f, des einen Durchschnittes de, fälle man fio senkrecht auf der andern kl, so ist auch efi = R. Nun ziehe man fa in dm senkrecht auf ef; so ist afi der Ebene dm Neigung gegen dl, und ef steht auf der Ebene afi senkrecht (45. S.). Diese Ebene, schneide kn in iu; weil auch li auf dieser Ebene senkrecht steht, (46. S.) so ist liu = R und uio der Ebene kn Neigung gegen dl, also nach der Voraussetzung uio = afi, also ui und af parallel, weil sie auch in einer Ebene afi sind. Ein Perpendikel also von a auf ui gelassen, steht auch auf af senkrecht (12. S. 5. 3.) und befindet sich in der Ebene des Neigungswinkels afi oder uio, welche auf beyden Ebenen dm, kn, senkrecht steht (4. 3.) daher steht dieses Perpendikel, auf beyden Ebenen kn, dm, senkrecht (1. 3.) die daher parallel sind (46. S. 8. Zus.).

8. Zus. Parallellinien AB; CD; 128. F. haben gegen einerley Ebene MNO einerley Neigung; Man lasse von ihnen auf die Ebene die Lothe BE; DF herab; die ebenfalls parallel sind (46. S.) also sind die Winkel ABE = CDF

(46. S. 2. Z.) aber E = F; folglich BAE = DCF (13. S.) d. i. die Neigungen sind gleich (II. Th. 1. Erkl.).

48. Satz. Lehrsatz.

Wenn zwo Ebenen, wie AEI, AKL, auf einer dritten BC senkrecht stehen; so stehet jener beyder Durchschnitt AI auf der dritten auch senkrecht.

Bew. Man lasse von einem willkührlichen Puncte A des Durchschnittes beyder senkrechten Ebenen, ein Perpendikel AI auf der einen Ebene KLA Durchschnitt mit BC; dieses muß auf BC senkrecht stehen (47. S. 1. Z.). Aber ein Perpendikel aus A auf der andern senkrechten Ebene Durchschnitt mit BC, ist auch auf BC senkrecht (47. S. 1. Z.) und folglich mit AI einerley (46. S. 5. Z.) folglich ist der Punct I in beyder senkrechten Ebenen Durchschnitten mit BC; folglich in beyden senkrechten Ebenen, oder AI das Loth auf BC ist beyder senkrechten Ebenen Durchschnitt.

Von den Kugelschnitten.

49. Satz. Lehrsatz.

Eine Kugel mit einer Ebene durchschnitten giebt einen Kreis.

Bew. Aus der Kugel Mittelpuncte D 109. F. falle auf die schneidende Ebene das Loth DH; Man

Digitized by Google

Man ziehe nach zween willkührlichen Puncten im Umfange des Schnittes E, F, gerade Linien aus D und H; so ist DE = DF (II. Th. 6. Erkl. Z.) und DHE = DHF = R (II. Th. 1. Erkl.) also HEq = DEq − DHq = DFq − DHq = HFq oder HE = HF; d. i. alle Puncte des Umfanges von H als einem Mittelpuncte gleich weit entfernt.

1. Geht der Schnitt durch der Kugel Mittelpunct selbst, so sind alle Linien, die in seiner Ebene aus dem Mittelpuncte an seinen Umfang gezogen werden, dem Halbmesser der Kugel gleich (II. Th. 6. Erkl. Z.) und also ist er ein Kreis, welcher dem Kreise gleich ist, der die Kugel beschrieben hat.

1. Zus. Jeder Schnitt, der nicht durch den Mittelpunct der Kugel geht, giebt einen kleinern Kreis als der ist, welcher die Kugel beschreibet, jeder Schnitt durch den Mittelpunct aber einerley Grösten.

2. Zus. Aus dem Ausdrucke des Halbmessers der Kugelschnitte $EH = \sqrt{(DEq - DHq)}$ folgt daß die Kreise desto gröſſer werden, je näher sie bey dem Mittelpuncte sind; für den durch den Mittelpunct wird DH = 0.

3. Zus. Eine gerade Linie schneidet die Kugelfläche in nicht mehr als zween Puncten. Denn man lege durch zweene Puncte, in welcher sie die Kugelfläche schneidet, und durch der Kugel Mittelpunct eine Ebene; Alle Puncte der geraden Li-

Digitized by Google

nie befinden sich in dieser Ebene (II. Th. Grundf.) und alle Puncte der Kugelfläche, welche in diese Ebene fallen, liegen in einem Kreise (49. S.). Sollte also die Kugelfläche von der geraden Linie dreymahl geschnitten werden, so müssen drey Puncte dieses Kreises in die gerade Linie fallen, wieder 16. S. Zus. Da nun die Peripherien zweener Kreise einander in den Endpuncten ihres gemeinschaftlichen Durchschnittes schneiden müssen, so können auch zweene Kreise auf der Kugelfläche einander nur zweymahl schneiden.

4. Zus. Jeder Kreis auf der Kugel ist der Durchschnitt einer gewissen Ebene mit der Kugel, und ein Loth aus der Kugel Mittelpuncte auf die Ebene dieses Kreises, geht durch seinen Mittelpunct, ein Loth aber aus seinem Mittelpuncte auf seine Ebene geht durch der Kugel Mittelpunct und eine Linie aus der Kugel Mittelpuncte durch des Kreises Mittelpunct steht auf seiner Ebene senkrecht (46. S. 5. Z.).

5. Zus. Grösste Kreise schneiden einander in einen gemeinschaftlichen Durchmesser durch den Mittelpunct der Kugel, und halbiren also einander. Es schneiden aber alle grösste Kreise einander, weil der Kugel Mittelpunct in aller Ebenen ist.

6. Zus. Kreise, die einander halbiren, sind grösste Kreise: denn sie können einander nicht halbiren, ohne einerley Durchmesser, und folglich einerley Mittelpunct zu haben, also wäre eine

Linie

Digitized by Google

linie aus der Kugel Mittelpuncte an beyder Kreise gemeinschaftlichen Mittelpunct, auf beyder Ebenen senkrecht (4. Z.) wieder (46. S. 10. Z.). Bey grössten Kreisen fällt ihr gemeinschaftlicher Mittelpunct mit dem Mittelpuncte der Kugel zusammen, und also kann durch diesen Mittelpunct auf jedes Ebene ein Loth gesetzt werden.

7. Zus. Wenn das Loth auf die Ebene eines Kreises durch seinen Mittelpunct, wie HD 109. F. verlängert wird, bis es der Kugel in zween Puncten (2. Z.) P und Q begegnet, so ist jeder dieser Puncte, von allen Puncten des Kreises gleich weit entfernt, den PEq = PHq + HEq und QEq = QHq + HEq; wo PH, HQ, HE, unveränderlich sind, E mag im Umfange des Kreises liegen, wo es will.

8. Zus. Wenn ein Punct der Kugelfläche P von allen Puncten eines Kreises gleich entfernt seyn soll, so muß ein Loth von ihm PH auf des Kreises Ebene gelassen durch desselben Mittelpunct gehen; denn wenn die Linie PE unveränderlich bleiben soll, E mag im Umfange des Kreises liegen, wo es will, so muß auch HEq = PEq − HEq unveränderlich, und also der Mittelpunct seyn.

9. Zus. Also haben nur die im 7. Z. bestimmten Puncte diese Eigenschaft, daß sie von allen Puncten des Kreises gleich weit entfernt sind. Man nennt sie Pole des Kreises.

10. Zuſ. Wenn eine Ebene durch das Ende des Halbmeſſers auf ihn ſenkrecht geſetzt wird, ſo liegen alle ihre übrigen Puncte auſerhalb der Kugel (46. S. 5. Z.) oder ſie berühret die Kugelfläche. Dieſe Ebene iſt für die Kugel, was die Tangente 19. S. für den Kreis iſt; und ein Loth auf die Kugelfläche durch einen gegebenen Punct iſt ein Loth auf die Ebene, welche die Kugel in dieſem Puncte berühret, und mit der Kugelfläche ein Element gemein hat (wie im 41. S. 5. 6. Z.).

50. Satz. Lehrſatz.

Eine gerade Linie PQ durch die beyden Pole des Kreiſes BEG ſteht auf ſeiner Ebene ſenkrecht und geht durch ſeinen Mittelpunct, und durch der Kugel Mittelpunct.

Bew. Das Loth PH von einem Pole P auf dem Kreis gefällt, geht durch ſeinen Mittelpunct (49. S. 8. Z.) und durch den andern Pol (49. S. 7. Z. und 46. S. 5. Z.) und durch der Kugel Mittelpunct (49. S. 4. Z.) weil es nun durch zweene Puncte nur eine gerade Linie giebt, ſo muß die Linie durch beyde Pole mit dieſem Lothe einerley ſeyn.

1, Zuſ. Ein Kreis PBQG durch des Kreiſes BEG Pole, ſteht auf ihm ſenkrecht (47. S.) und iſt ein gröſſter Kreis (49. S. 1. Z.) und ſchneidet die Ebene des Kreiſes BEG ſo, daß beyder Ebenen Durchſchnitt, durch H des Kreiſes

ſes BEG Mittelpunct geht, das iſt ein Durchmeſſer von BEG iſt, und alſo dieſen Kreis halbirt.

2. Zuſ. Wenn ein gröſſter Kreis auf einen andern gröſſten oder kleinern ſenkrecht ſteht, ſo geht er durch dieſes andern Pole durch und halbirt ihn. Denn man ziehe durch des gröſſten Kreiſes, d. i. durch der Kugel, Mittelpunct ein Loth auf die Ebene des andern; dieſes befindet ſich in dem gröſſten Kreiſe (47. S. 2. Z.) und geht durch des andern Mittelpunct (49. S. 4. Z.) und Pole (49. S. 7. Z.) alſo folgt der Beweis wie im 1. Z.

3. Zuſ. Wenn zweene gröſſte Kreiſe auf einander ſenkrecht ſtehen, ſo geht jeder durch des andern Pole (2. Z.).

4. Zuſ. Die Bogen PE, PB, gröſſter Kreiſe zwiſchen dem Kreiſe BEG, und ſeinem Pole, ſind gleich (22. S. 1. Z. und 49. S. 9. Z.).

51. Satz. Lehrſatz.

Kreiſe, deren Ebenen parallel liegen; Parallelkreiſe MN, KL, haben einerley Pole P, Q, 110. Fig.

Bew. Des einen Pole ſind in einem Lothe aus der Kugel Mittelpuncte auf ſeine Ebene (50. S.) und eben dieſes Loth ſteht auch auf des andern Ebene ſenkrecht (46. S. 10. Z.) und geht alſo auch durch ſeine Pole (50. S.). Es ſchneidet aber die Kugelfläche nur in zween Puncten

ten (49. S. 3. Z.) und also sind diese Durchschnittspuncte die Pole beyder Kreise, oder auch mehrerer, derer Ebenen parallel liegen.

52. Satz. Lehrsatz.

Wenn durch zweener Parallelkreise Pole grösste Kreise PGDQ; PHEQ, geführt werden, so sind der Parallelkreise Bogen zwischen ihnen GH; DE; ähnlich.

Bew. Die gerade Linie PQ, schneide beyder Parallelkreise Ebenen in ihren Mittelpuncten (50. S.) F; C, so sind GFP; HFP; DCP; ECP, rechte Winkel (50. S. und II. Th. 1. Erkl.) aber die Linien GF, DC, in einer Ebene, nähmlich des Kreises PGDQ, und also parallel und eben so die Linien HF, EC; also die Winkel DCE = GFH (46. S. 2. Z.) also ihre Maasse GH, DE ähnlich (22. S. 6. Z.).

1. Zus. Jeder der genannten Winkel ist die Neigung der Halbkreise PGDQ, PHEQ gegen einander; (49. S. 5. Z. und II. Th. 2. Erkl.) woraus ebenfalls ihre Gleichheit erhellt.

2. Zus. Der Kreis KDEL kann ein grösster seyn, wenn er durch den Mittelpunct gehet; alsdenn ist der Bogen PD das Maaß des rechten Winkels PCD (22. S.) also = 90° = PHE (50. S. 4. Z.) oder der Bogen PD eines grössten Kreises zwischen dem grössten Kreise KDL und dessen Pole P ist ein Quadrant.

3. Zus.

Digitized by Google

3. Zuſ. Die Neigung der Kreiſe PDQ, PEQ hält ſo viel Grade eines gröſſten Kreiſes als der Bogen DE hat.

4. Zuſ. Eben dieſe Neigung wäre auch ſo groß als der Winkel AQB, dem zwo Tangenten, eine QA des Kreiſes PDQ, die andere QB des Kreiſes PEQ, mit einander machten weil jede Tangente, auf den gemeinſchaftlichen Durchmeſſer PQ, in der Ebene ihres Kreiſes ſenkrecht ſtehet. Dieſe Tangenten aber ſtellen die Richtungen ihrer Bogen bey Q vor, (41. S. 6. Zuſ.) daher ſagt man die Kreiſe ſelbſt machen bey Q oder P den Winkel AQB=DCE. Man heiſſt einen ſolchen Winkel zweener gröſſten Kreiſe mit einander, einen ſphäriſchen Winkel, deſſen Maaß alſo ein Bogen eines gröſſten Kreiſes iſt, der zwiſchen den beyden Puncten D, E, enthalten iſt, die jeder in ſeinem Kreiſe, 90. Gr. von Q entfernt ſind. Sphäriſche Scheitelwinkel ſind gleich; und Nebenwinkel machen zuſammen 2R.

5. Zuſ. Wenn QD, QE zweene Quadranten gröſſter Kreiſe ſind, ſo ſteht der gröſſte Kreis durch ED auf beyde Quadranten ſenkrecht, und geht durch beyder Pole. Denn dieſer Kreis liegt in der Ebene DCE; welche auf PQ ſenkrecht ſtehet (2. Zuſ.) woraus die Wahrheit vermöge des 2. Zuſ. folgt.

6. Zuſ. Die beyden andern gröſſten Kreiſe gehen aber auch durch die Pole des dritten, (50.

S.

Digitized by Google

S. 3. Z.) welche also in P und Q seyn müssen (49. S. 3. Z.).

7. Zus. Der Pol eines grössten Kreises KDL wird gefunden wenn man auf den Kreis einen andern grössten QDP senkrecht setzt, und in solchen den Bogen DP = 90° nimmt.

8. Zus. Einen grössten Kreis durch zweener andern Pole zu setzen, muß man ihn auf beyde (50. S. 3. Z.) d. i. auf ihren Durchschnitt (48. S.) senkrecht setzen. Also wird ein grösster Kreis KDEL durch der beyden PDQ; PEQ, Pole gehen, wenn seine Ebene auf dem Durchmesser PQ in dem sich jene beyden schneiden, senkrecht stehet.

9. Zus. Wenn mehr grösste Kreise einander alle im Durchmesser PQ schneiden, so geht KDEL (8. Z.) durch aller Pole.

10. Zus. Wenn 111. Fig. S; s; die Pole des Kreises PDQ 110. F. und T; t, des Kreises PEQ sind, (8. Zus.) so ist DT + TS = 90. Gr. = TD + DE; also DE = ST = st; folglich St = Sts — st = 180. Gr. — DE oder die Entfernung der beyden Pole zweener grössten Kreise die beyde nach einer Seite der Kreise zu liegen, ist dem spitzigen Winkel der Kreise gleich (4. Z.) und die Entfernung des Poles, der auf des ersten Kreises einen Seite liegt, von dem Pole, der auf des andern anderer liegt, ihrem stumpfen Winkel.

11. Zus.

Digitized by Google

11. Zus. Zweene gröſſte Kreiſe machen mit einem dritten nicht gleiche Winkel nach einer Seite. (49. S. 5. Z. und 47. S. 7. Zus.).

Theodoſii Sphaericorum libri 3. gr. et lat. Oxon. 1707. Theod. Sphaerica per I. Barrow Lond. 1675.

Die Möglichkeit prismatiſcher Körper.

53. Satz. Aufgabe.

Die Lage und Geſtalt der untern Grundfläche ABCD 112. F. eines Prisma ſind gegeben; imgleichen eine Ebene, die mit dieſer parallel iſt. Man ſoll die Möglichkeit eines Prisma zwiſchen dieſen beyden Ebenen zeigen.

Aufl. Man ziehe nach Gefallen durch einen Winkelpunct der untern Grundfläche, eine Linie Aa bis an die parallele Ebene; ſo wird a eben der Winkelpunct in der obern Grundfläche ſeyn. Mit Aa, ziehe man durch alle untern Winkelpuncte Parallelen bis an die parallele Ebene, Bb, Cc, Dd, ſo giebt ſich in jeder Parallele, wo ſie die parallele Ebene ſchneidet, eben der Winkelpunct der obern Grundfläche. Man hat alſo die Winkelpuncte und Seiten der obern Grundfläche; die letztern ſchlieſſen mit den gezogenen Parallelen die Seitenflächen des Prisma ein.

Bew. Die Linien Aa, Bb, Cc, Dd, ſind alle unter ſich parallel (46. S. 1. Z.). Man nehme nun, welche Seite der untern Grundfläche

man

man will, z. E. CD, und betrachte die beyden Parallelen durch ihre Endpunete Cc, Dd; die Ebene, in der sich diese Parallelen befinden, schneidet die beyden parallelen Ebenen der obern und untern Grundfläche in zwo Parallellinien cd, CD, (II. Th. 2. Erkl. Zus.) die selbst zwischen Parallelen Cc, Dd, enthalten, und daher gleich sind (12. S. 3. Z.). Eben so erhellt, daß cb, CB, parallel und gleich sind; da nun vermöge des Verfahrens; cb, cd, mit CB, CD, auf einer Seite der Linie Cc liegen, so ist dcb = DCB (46. S. 2. Z.). Wenn man also die Figur, welche die Parallelen durch A, B, C, D, in der parallelen Ebene auf die erwähnte Art bestimmen, so ringsherum betrachtet, so findet sich, daß in ihr die Winkel und die Seiten der Gröſse nach eben so nach einander folgen, wie in der Figur ABCD; also ist abcd die obere Grundfläche, und AabB, BbcC u. s. w. sind Parallelogrammen und Seitenflächen eines Prisma, dessen Seiten Aa; Bb, Cc, u. s. w. alle von einer Länge sind.

Anm. I. Ich nenne Seiten eines Körpers gerade Linien in denen ein paar der Ebenen die ihn begränzen einander schneiden. Ist eine dieser Ebenen, Grundfläche so ist die Seite des Körpers zugleich Seite der Grundfläche wie 112. Fig. DC, wenn ABCD Grundfläche, dcCD Seitenfläche ist. Unten im 14. Zus. sage ich Seitenlinien welches Wort auch Hr. H. Karsten braucht. Selbst in der gemeinen Sprache heissen sie nicht ungewöhnlich Ranten, das wäre ohngefähr Uebersetzung von acies, wie Euler sie nennt, Elem. doctr. Solidor. II.

Digitized by Google

M. Es ist sonderbar, daß für Linien die so oft müssen erwähnt werden, Euklid keinen besondern Nahmen hat, er redet nur von Seiten der Grundfläche; Solche Linien wie Dd 112. Fig. heissen bey ihm: auf der Grundfläche stehende, senkrecht, oder schief z. E. XI. B. 31. Satz. Hr. Lorenz sagt in seiner Uebersetzung Eckseiten.

Von den ordentlichen Körpern (8. Erkl.) braucht Euklid im XIII. B. Seite in der Bedeutung (I). Aber da bey diesen eine Seitenfläche völlig wie die andere ist, so kann man jede als Grundfläche ansehn.

1. Zus. Wenn nur die Ebene, in welcher die obere Grundfläche des Prisma liegen soll, gegeben ist, so kann die Linie Aa unzählige Lagen haben. Wäre aber der Punct a, der das oben seyn soll, was A unten ist, gegeben, so müsste man Aa dadurch ziehen. Dieser Umstand bestimmt also ein einziges Prisma, da sonst unzählige, welche der Aufgabe genug thun, möglich sind.

2. Zus. Wenn Aa auf die untere Grundfläche senkrecht stehet, so stehet sie auch auf die obere senkrecht (46. S. 10. Z.) und alle Parallelen Bb, Cc; u. s. w. stehen auf beyde Grundflächen senkrecht (46. S.) auch sind alle Seitenflächen auf beyde Grundflächen senkrecht (47. S.) dieses zeigt die Möglichkeit eines senkrechten Prisma (II. Th. 4. Erkl.) über jeder Grundfläche, und für jede Weite der Grundflächen von einander.

3. Zus. Ein Prisma mit der Grundfläche parallel durchschnitten, zeigt eine Figur $\alpha\beta\gamma\delta$

Digitized by Google

die jeder Grundfläche gleich und ähnlich ist. Denn jede Ebene, die mit der Grundfläche parallel liegt, schneidet die Ebenen Ab; Bc; Cd; u. s. f. in Linien $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, u. s. f. die mit AB, BC, CD, u. s. f. parallel sind (II. Th. 2. Erkl. Zus.) und auch ihnen gleich sind (12. S. 3. Z.) und einerley Winkel machen (46. S. 2. Z.).

4. Zus. Wenn zwo Seiten der Grundfläche wie AD, BC, parallel sind, so sind die ihnen zugehörigen Seitenflächen Ad, Bc, parallel; Stiessen sie irgendwo zusammen, so könnte man durch einen Punct, der in beyden zugleich wäre, eine Ebene mit der Grundfläche parallel legen; deren Durchschnitte mit beyden Ebenen Ad; Bc; also durch einen Punct gingen, aber jede Ebene, die mit der Grundfläche parallel liegt, macht in Ad, Bc, Durchschnitte, die mit AD, BC, parallel (3. Z.) und also auch unter sich parallel sind (46. S. 1. Z.). Ueberhaupt erhellet folgendes: Wenn die vier Linien Aa; Bb; Cc; Dd; parallel sind, so sind die Ebenen Ab mit Dc; Ad, mit Bc parallel.

5. Zus. Wenn die Grundflächen Parallelogrammen sind, so sind die Seitenflächen vier Parallelogrammen, deren jede zwey gegenüberstehende parallel sind (4. Zus.). Ein Parallelepipedum (II. Th. 4. Erkl.) ist also in sechs Parallelogrammen eingeschlossen, da die gegenüberstehenden paarweise parallel und gleich sind. Die

Gleich-

Digitized by Google

Gleichheit folgt daraus, weil in diesem Falle AD = BC.

6. Zus. Ein senkrechtes Parallelepipedum, hat vier Rechtecke zu Seitenflächen: Sind auch seine Grundflächen Rechtecke, so ist es in sechs Rechtecke eingeschlossen. Man kann es alsdenn rechtwinklicht nennen. Seine Seitenflächen stehen alle senkrecht auf einander. Denn wenn Ab, Bc, auf AC senkrecht stehen; so steht Bb auf AC senkrecht (48. S.) und ABC ist der Ebenen Ab, Bc, Neigungswinkel.

7. Zus. Hat ein senkrechtes Parallelepipedum, Quadrate zu Grundflächen; und ist die senkrechte Weite der Grundflächen wie Aa 129. 112. F. der Seite des Quadrates gleich; so sind die Seitenflächen wie Ab, Quadrate, von einerley Grösse mit der Grundfläche; und das Parallelepipedum ist rechtwinklicht. Es heisst ein Würfel (cubus) dessen Seite die Seite eines solchen Quadrats heisst, deren sechs ringsherum den Würfel einschliessen.

8. Zus. Mit der Ebene des Kreises, der K zum Mittelpuncte, KE zum Halbmesser hat 113. F. liege eine andere parallel, die von einer durch K nach Gefallen gezogenen Linie in k geschnitten werde. Durch einen willkührlichen Punct im Umfange des Kreises, E, ziehe man Ee mit Kk parallel; die Ebene durch Kk und Ee, wird die parallele Ebene in einer Linie, die mit KE parallel ist, schneiden. (II. Th. 2. Erkl. Zus.). Es

Digitized by Google

geschehe in ke, so ist ke = KE (12. S. 3. Z.) also e im Umfange eines Kreises der k zum Mittelpuncte und des untern Kreises Halbmesser zu dem seinigen hat. Da also E jeden Punct im Umfange des untern Kreises z. E. F vorstellet, so giebt sich oben auch ein Kreis; und beyder zusammengehörige Puncte sind mit geraden Linien Ee, Ff, verbunden. Diesen Körper schliessen also zweene gleiche und parallele Kreise als Grundflächen, und eine krumme Seitenfläche ein. Er heisst ein Cylinder, die Linie Ee seine Seite und die ihr gleiche Kk seine Axe; Steht sie auf den Grundflächen senkrecht, so heisst er auch senkrecht, sonst schief. Wenn zweener Cylinder (oder auch Kegel) Axen einerley Neigung gegen ihre Grundfläche, und einerley Verhältnisse gegen ihrer Grundflächen Durchmesser haben, heissen sie ähnlich.

9. Zus. Jeder Durchschnitt, der im Cylinder mit der Grundfläche parallel geschieht, ist ein Kreis der Grundfläche gleich, denn man kann die parallele Ebene, in der k und e sind, dem untern Kreise um K nahe oder weit legen, und die vorigen Schlüsse bleiben alle ungeändert, weil die Weite der Ebenen in sie keinen Einfluß hat. Eben so liesse sich auch der 3. Zus. darthun.

10. Zus. Man kann sich also vorstellen, ein Cylinder entstünde, indem sich der Kreis kef an der Linie eE so herunter bewegt, daß seine Ebene sich beständig parallel; und ek beständig in

der

Digitized by Google

der Ebene eEK* bleibt. Durch eine ähnliche Bewegung der Figur abcd 129. F. an aA herunter, entstehet das Prisma.

11. Zus. Im senkrechten Cylinder, ist EKke ein Rechteck (46. S. 10. Z.) an dessen Seite Kk die Mittelpuncte aller Querschnitte (9. Zus.) liegen. Er entsteht also, indem sich dieses Rechteck um die Axe Kk drehet. Seiner Grundflächen senkrechte Weite, oder seine Höhe ist die Axe Kk oder Seite Ee.

12. Zus. Ist EF unendlich klein, so kann man es als gerade und EFfe als eine unendlich kleine Ebene ansehen; die auf der Grundfläche senkrecht stehet, wenn Kk und Ee darauf senkrecht stehen (47. S.). So ist der Cylinder ein Prisma von unzählich vielen Seiten, und der senkrechte ein senkrechtes.

13. Zus. Wären 112. F. Dδ = δd; so wären die Prismata Dβ = δb denn sie würden einander decken oder eins genau in das andere hohle passen, wenn man des obern δb, untere Grundfläche δβ auf die untere Grundfläche DB des untern legte.

Hieraus fliesst weiter dieses: wenn man die Seitenlinie Dδ eines Prisma in lauter gleiche Theile theilt, und durch die Theilungspuncte Schnitte mit der Grundfläche parallel führt, so sind zwischen jedem Paare nächster Schnitte, gleiche kleine Prismata enthalten, oder das Pris-

ma Dβ wird dadurch in soviel gleiche Theile getheilt soviel man in der Linie Dδ macht.

14. Zus. Läßt sich also δd, welches ich nun nicht mehr = Dδ setze, in Theile von eben der Grösse theilen, wie man in Dδ gemacht hat, so enthält das Prisma δb soviel kleine gleiche Prismata, so viel δd gleiche Theile enthält. Und so darf man sich nur des 24. S. erinnern, um zu schliessen daß Dβ : δb = Dδ : δd auch wenn eine dieser Verhältnisse irrational wäre. Die kleinen Prismata sind hie in Absicht auf die beyden grossen, völlig das was die kleinen Dreyecke DEd, BAb, 78. F. in Absicht auf die beyden grossen DEC, CAB, sind.

Haben also zwey Prismata gleiche und ähnliche Grundflächen DB, δβ, und machen ihre Seitenlinien Dδ, δd, die durch ähnlich liegende Winkelpuncte der Grundflächen gehen, gleiche Winkel mit den Grundflächen (wenn ein Paar Seitenlinien dieses thut, thut es jedes) (53. S.) so verhalten sich die Prismata wie diese Seitenlinien.

15. Zus. Folglich auch wie Perpendikel von δ, d, auf DB, δβ, gelassen, oder wie der Prismatum Höhen, denn diese Perpendikel werden sich wie Dδ : δd verhalten, welches nach Art des 47. S. 8. Z. leicht zu sehen ist. Ist das Prisma senkrecht, so sind Dδ, δd, selbst die Höhen.

16. Zus. Ueber der Grundfläche FGKH 115. F. stehe ein Parallelepipedum HCKD seine Sei-

Digitized by Google

Seitenflächen sind FGCD; HKTR; und GKTC; FHRD; Man ziehe in der Ebene DG, nach Gefallen durch F und G, parallele Linien, die DC verlängert nothwendig irgendwo in B, A, schneiden werden; so ist FBAG ein Parallelogramm: weil BA, auf der verlängerten DC liegt, die mit FG parallel geht, und also FB, GA, Parallelen zwischen Parallelen sind. Nun sey HS der Durchschnitt der Ebenen RK und FBH; und zwar liege S in der verlängerten RT; weil die Ebenen RK, DG, parallel sind, so sind HS, FB parallel (II. Th. 2. Erkl. Zus.). Eben so, werden KN, GA, parallel seyn, wenn KN der Ebenen AGK, und RK, Durchschnitt ist; Also sind KN, FB, beyde mit GA, und daher unter sich parallel; (46. S. 1. Z.) Eben so ist HS mit GA parallel, weil beyde mit FB parallel sind; oder alle vier Linien FB, GA, KN, HS, sind parallel; also BS = FH = GK = AN (12. S. 3. Z.) weil BS; AN, der Ebenen HFB, AGK, Durchschnitte mit zwo Parallelen Ebenen RA; HG, sind. Daher sind BANS = FGKH; FBSH = GANK; FBAC = HSNK, Parallelogrammen. So entsteht also ein Parallelepipedum, HAKB; welches ich das zweyte nennen will; Es hat mit dem ersten HCKD, einerley Grundfläche FGKG; steht mit ihm zwischen einerley parallelen Ebenen FK und RA, das heisst, beyde haben einerley Höhe und zwo gegenüberstehende Seitenflächen des zweyten Parallelepipedi,

nähmlich FA, HN liegen mit zwo dergleichen Seitenflächen des ersten mit FC; HT in einerley Ebenen.

Die Ausmessung der Körper.

54. Satz. Lehrsatz.

Zwey Parallelepipeda wie die im nächsten Zusatze, sind gleichen Innhalts.

Bew. Die Linien FB, GC, mögen einander in L und HS, KT, in M, schneiden, so wird LM der Ebenen FS, KC Durchschnitt seyn, und ist also weil HD; KC; parallel sind; parallel mit FH (II. Th. 2. Erkl. Z.) folglich auch mit BS und CT die mit FH parallel sind. Also sind MLBS; MLCT, Parallelogrammen wie auch BCTS; die Dreyecke BCL, STM, aber haben einerley Seiten und liegen in parallelen Ebenen; also schliessen die genannten Parallelogrammen und Dreyecke zwischen sich ein Prisma BSMLCT ein; Eben so ist LMKHFG ein anderes Prisma.

Ferner ist das Prisma DRHFBS=CTKGAN denn man lege die Ebenen DRHF; CTKG; auf einander, daß D auf C u. s. f. fallen; Diese beyde Ebenen sind parallel (53. S. 5. Z.) und machen also mit der Ebenen DS, CN, einerley Winkel (47. S. 6. Z.) welche beyde Ebenen also nun in eine fallen, (47. S. 5. Z.) weil nun DC = BA = RT = SN, so ist DB = CA = RS = TN und also fallen nun die Puncte B; S; auf A;

Digitized by Google

A; N; folglich decken die Seitenfläche DS, CN, einander, so wohl als die BH, AK; und die Dreyecke DBF, CAG, imgleichen RHS, TKN; so erhellet also, daß beyde Prisma einander deken, und gleich sind.

Von diesen beyden gleichen Körpern nun nehme man das Prisma BSMLCT weg, so bleiben zweene Körper gleichen Innhalts übrig; die Ebenen, die sie einschliessen, sind bey dem einen; FLMH; FHRD; RDCT; CTML; bey dem andern; GLMK; GKNA; NASB; BSML; zu jedem dieser beyden gleichen Körper setze man wieder das Prisma LMKHFG; so kommen die beyden Parallelepipeda heraus, deren Gleichheit erwiesen werden sollte.

55. Satz. Lehrsatz.

In der 116. F. sey das erste Parallelepipedum; wie 53. S. 8. Z; auf eben der Grundfläche FGKH, stehe ein drittes von gleicher Höhe; aber keine seiner Seitenflächen, liege mit den Seitenflächen des ersten in einerley Ebene; die Seitenflächen FGQP; HKVO machen nähmlich mit der Grundfläche FGKH, zwar einerley Winkel, aber andere als die, welche die Seitenflächen FC; HT, mit eben der Grundfläche machen; und so verhält es sich auch mit den Seitenflächen FHOP; GKVQ; in Vergleichung derer FR; GT; Ich behaupte dem ohngeachtet, daß diese beyden Körper gleichen Innhaltes sind.

Digitized by Google

Bew. Weil die obere Grundfläche PQVO mit DCTR in einer Ebene liegt, so werden DC, RT, verlängert in PO; QV; wo nöthig verlängert, einschneiden; es geschehe solches in B; S; A; N; so sind B; A; in der Ebene FC; und S; N; in der Ebene HT; und wegen der Parallelen PO; QV; sind BA, SN, parallel und gleich (12. S. 3. Z.) jede nähmlich = PQ = OV; Eben so ist AN = BS = GT = PO; also die Parallelogrammen ABSN = QPNV = GFHK; folglich sind die gerade Linien AG; BF; SH; NK; alle parallel und gleich (12. S. 3. Z. und 46. S. 1. Zus.) also entsteht ein Parallelepipedum, dessen beyde entgegengesetzte Grundflächen ~~ASN~~ FGKH; ~~PQVO~~; sind; das hie, Verwirrung zu vermeiden, nicht vorgestellt wird, aber mit dem zweyten der 115. F einerley ist, es hat zwo Seitenflächen FBSH; GANK, in einerley Ebenen, mit den beyden Seitenflächen FPOH; GQVK, und ist also dem dritten gleich (54. S.). Es hat aber auch die beyden Seitenflächen FBAG; HKNS, in einerley Ebenen, mit des ersten beyden Seitenflächen FC; HT; also ist es auch diesem gleich. Folglich sind das erste und dritte unter sich gleich.

1. Zus. Alle Parallelepipeda, über einerley Grundfläche, und von gleicher Höhe, sind gleichen Innhalts.

2. Zus. Jedes Parallelepipedum FVPK 116. Z. ist so groß als eines von gleicher Höhe, das auf

auf eben der Grundfläche lauter senkrechte Seitenflächen hat. Man richte nähmlich durch der Grundfläche Winkelpuncte F, G, K, H; Lothe auf ihre Ebene auf, bis solche an die Erweiterung der Ebene PQVO in D, C, T, R, treffen; so bekömmt man vier Rechtecke (46. S. 10. Z.) FDCG; HRTK; FHRD; GKTC; welche auf der Grundfläche senkrecht stehen; (47. S.) und paarweise, wie ich sie zunächst nach einander genannt habe, parallel sind; (53. S. 5. Z.) also ein Parallelepipedum, FCRK wie dieser Zusatz fodert, dessen Gleichheit mit FVPK aus 1. Zus. erhellt.

56. Satz. Lehrsatz.

Ein Parallelepipedum 117. F. dessen Seitenflächen GD, KR, KC, HD, auf der Grundfläche GH senkrecht stehen; ist so groß als eines von eben der Höhe, das ein Rechteck, welches jener Grundfläche gleich ist, zur Grundfläche hat.

Bew. Man lasse Kh, Gf, senkrecht auf HF; so ist das Rechteck KhfG dem Parallelogramm KHFG, gleich. Man ziehe auf HF in der Ebene HD Perpendikel hr, fd bis an RD sie werden auf die Ebene KF senkrecht seyn; (47. S. 1. Z.). Ferner sind Tr; Gd; der Ebenen Th; Cf, Durchschnitte mit der Ebene TD, also mit Kh; Gf; und folglich auch unter sich parallel und gleich, daher rd = CT = RD, und CdD = GfF (46. S.

Digitized by Google

S. 2. Z.) = 90° = TrR, also ist TrdC ein Rechteck, das dem untern KhfG gleich und ähnlich ist, und dhfr; CGKT; imgleichen dCGf, rTKh, sind gleiche und ähnliche, parallele (13. S. 3. Z.). Rechtecke, welche also mit den nur genannten Rechtecken, ein rechtwinklichtes Parallelepipedum, (53. S. 6. Z.) einschliessen; dieses hat nun mit dem im Satze genannten einerley Innhalt. Denn es geht ihm auf der einen Seite das Prisma TKHhrR ab, auf der andern kömmt das CGFfdD darzu, welche beyde gleich sind, wie man nach dem Verfahren beym 54. S. beweisen kann. Nähmlich die Seitenflächen TrhK; CdfG können so auf einander gelegt werden, daß sie einander decken; und weil TRHK; CDFG, mit ihnen gleich grosse Winkel, nähmlich hKH; fGF, machen, so decken auch diese beyden Flächen, und folglich die beyden Prismata einander.

1. Zus. Parallelepipeda von einer Höhe haben einerley Innhalt, wenn ihre Grundflächen einerley Innhalt haben.

2. Zus. FGCD, RHKT 117. F. und ABHE FDCG 118. F. sollen zwey senkrechte Parallelepipeda bedeuten, deren Grundflächen FC, AH, gleich, aber nicht ähnlich sind; Ihre Seitenlinien FH; AD, stehen also senkrecht auf den Grundflächen, und sind folglich ihre Höhen. Diese beyden Parallelepipeda, die ich der Kürze wegen CH; HD, nennen will, verhalten sich

wie

Digitized by Google

wie ihre Höhen. Denn man nehme AQ = FH; und lege durch Q eine Ebene mit AH parallel, so schneidet sie von HD ein Stück HQ ab, das vermöge des 1. Zus. = CH ist. Es verhält sich aber HQ: HD = AQ: AD (53. S. 15. Zus.). Folglich CH: HD = FH: AD.

57. Satz. Aufgabe.

Ein rechtwinklichtes Parallelepipedum auszumessen. 118. F.

Aufl. Man messe mit einerley Maasse AK, seine drey Seiten AB, AE, AD, die Zahlen, welche für diese Seiten herauskommen, zeigen an, wievielmahl der Würfel von der Seite AK in dem Körper enthalten ist.

Bew. So vielmahl das Maaß AK in der Seite AB enthalten ist, so viel Würfel von der erwähnten Grösse, können neben einander an AB gesetzt werden; diese Reihe von Würfeln lässt sich so vielmahl wiederhohlen, so vielmahl das Maaß in AE enthalten ist. So giebt es eine Schicht von Würfeln, die den Boden ABHE bedecken, weil jedes Würfels Grundfläche ein Quadrat ist, und solchergestalt gefunden wird, wieviel dergleichen Quadrate oder Grundflächen in dem Boden Raum haben (42. S.). In der Weite vom Boden KL = AK welche der Höhe des Würfels gleich ist, schneide man das Parallelepipedum parallel mit dem Boden,

den, so bekömmt man eine Fläche, die dem Boden gleich und ähnlich ist (53. S. 3. Z.), und in der die obern Grundflächen der ersten Schicht aller Würfel liegen. Auf diesen zweyten also, läßt sich wieder eine Schicht Würfel setzen, und dieses so vielmahl wiederhohlen, so vielmahl die Höhe des Würfels, oder das angenommene Maaß in der Linie AD enthalten ist. Diese Zahl also giebt die Menge der Schichten, und folglich die Menge aller Würfel, wenn man sie mit der Menge Reihen, das ist, mit dem Producte der Menge der Würfel einer Reihe in die Zahl der Reihen multiplicirt. Wenn also AB, AE, AD, Zahlen bedeuten, deren Einheit AK ist; so ist das Product AB. AE. AD, die Menge der Würfel, welche das Parallelepipedum enthält.

1. Zus. Nennt man diese drey Linien Länge, Breite und Höhe, so giebt das Product aus ihnen den körperlichen Innhalt.

2. Zus. Sie mögen a; b; c; heissen, so ist der Innhalt = abc;

3. Zus. Also = a^3 wenn alle drey gleich sind:

4. Zus. Es sey AK = d; a = 10. d so ist $a^3 = 1000. d^3$.

5. Zus. Also hält bey Decimalmaasse, der Würfel, der eine Ruthe, d. i. zehn Fuß, zur Seite hat; 1000 Cubikfuß; der Cubikfuß 1000 Cubikzoll; u. s. w.

6. Zus.

6. Zuſ. Würde aber das Längenmaaß nach 12. eingetheilt, ſo hielte die Cubikruthe; 12. 12. 12 = 1728 Cubikfuß, der Cubikfuß 1728 Cubikzoll, u. ſ. w.

7. Zuſ. So laſſen ſich höhere Maaſſe auf niedrigere und umgekehrt, bringen; z. E. 12678451729 Cubiklinien ſind 12° 678′ 453″ 729‴ wenn zehntheilichtes Maaß gebraucht worden. Bey zwölftheilichtem müſſte man die gegebene Zahl durch die Diviſion mit 1728. auf Zoll; die Zolle durch eben dergleichen Diviſion auf Fuß; und die Fuß wieder durch dergleichen auf Ruthen bringen.

8. Zuſ. Wenn ein anderes Parallelepipedum, deſſen Seiten mit eben dem Maaſſe gemeſſen werden, die Zahlen α, β, γ, giebt; ſo verhält ſich beyder Innhalt (2. Z.) wie abc: $\alpha\beta\gamma$; d. i. in der Verhältniß, die aus den dreyen a: α; b: β; c: γ zuſammengeſetzt iſt.

Es brauchen auch nicht nothwendig alle ſechs Linien mit einerley Maaſſe gemeſſen zu ſeyn, es iſt genug daß einerley Maaß bey dem Paare gebraucht wird, das in eine Verhältniß kömmt, und ſo können a; α; mit einem Maaſſe gemeſſen werden, b; β; mit einem andern; c; γ; mit einem dritten.

Dieſes verſteht man aus dem was beym 42. S. 5. Zuſ. iſt erinnert worden.

9. Zuſ.

9. Fus. Ist $a:\alpha = b:\beta = c:\gamma$, also $\beta = \frac{\alpha b}{a}$; $\gamma = \frac{\alpha c}{a}$, so ist $abc:\alpha\beta\gamma = abc:\frac{bc\alpha^3}{a^2} = a^3:\alpha^3$; Solche rechtwinklichte Parallelepipeda heissen ähnlich, und sie verhalten sich also wie die Würfel ähnlich liegender Linien in ihnen. Bey schiefen wird zur Aehnlichkeit auch noch eine gleiche Neigung der Seitenflächen gegen einander und gegen die Grundflächen erfodert.

Exempel. I. In einem Lande ist die Holzklafter 6 Fuß breit und hoch, 4 F. 6 Zoll lang.

Das Holz wird an eine Factorey verkauft bey der ist die Klafter nach eben dem vorigen Maasse 6 Fuß 3 Zoll breit und hoch 4 F. $8\frac{1}{4}$ Z. lang.

Wieviel Landklaftern jede = L gehören zu einer gewissen Menge z. E. 5000, Factoreyklaftern? jede = F oder x. L = m. F wo m gegeben ist, x gesucht wird.

II. Breite und Höhe sind bey der Landklafter 72 Zoll, bey der Factoreyklafter 75 Z. Die Länge ist bey jener 54, bey dieser $56\frac{1}{4}$; Und in völliger Schärfe $72:75 = 54:56\frac{1}{4} = 24:25$.

III. Da nun die Klaftern rechtwinklichte Parallelepipeda sind, so ist $L:F = 24^3:25^3$ Folglich $F = L.(1+\frac{1}{24})^3$.

IIII. Aus dem Werthe von $\frac{1}{24}$ (Arithm. 3. C. 3. §.) findet sich das Quadrat dieses Bruchs = 0,001736111... der Würfel = 0,00007233796... wozu man nur die Division mit 24 wiederhohlen darf.

So lässt sich der Würfel (III) sehr bequem berechnen, so weit als man will. Bis auf Hundertmillionstheilchen ist F = L. 1,13028067.

V. Jede Menge Factoreyklaftern in Landklaftern auszudrucken, darf man also nur mit dieser Menge die

die Zahl rechter Hand multiplicirt, m F = m. L. 1, 13028677.

So 5000. F = L. 5651, 4033 . . .

VI. Da man doch im Ernste soviel Genauigkeit nicht suchen wird, so brauche man

$$\log \frac{25}{24} = 0,0177288$$

$$3. \log \frac{25}{24} = 0,0531864 = \log (F : L)$$

zur Zahl 1, 1302 gehörig (IV).

VII. Da ist

$$\log 5000 + 3. \log \frac{25}{24} = 3,7521564$$

giebt 5000. F = 5651, 4. L. welches wohl für Holz genau genug wäre.

VIII. Aus m. F = L. (m + m. 0, 13028) und log 0, 13028 = 0, 1148777 — 1 fände man das Gesuchte noch etwas genauer;

Im Exempel, gäben die Logarithmen m. 0, 13028 = 651, 40.

IX. Deutlich zöge man den Logarithmen (VI) vom Logarithmen einer gegebenen Zahl Landklaftern ab, zu finden wieviel Factoreyklaftern eben soviel betragen. Nähmlich, wenn x gegeben ist, m gesucht wird, ist

$$\log x - \log (F : L) = \log m.$$

X. Das Exempel ist aus dem allgemeinen Forstmagazine 12. B. 161. S. in Hrn. Beckmanns ökonomischer Bibliothek I. B. 4. St. 545. S. angeführt. Es ist unterschiednen Rechnern vorgelegt worden, und sie haben, wie berichtet wird, unterschiedne Facit herausgebracht. Was mögen das für Rechner gewesen seyn? Und was für Herren die sich unterstanden Forstwesen, Factoreywesen, u. d. gl. zu regieren, und so was nicht selbst berechnen konnten?

XI. Ohne an Vergleichung der Klaftern zu denken, ist die Landklafter $= 72.\ 72.\ 54$; die Factoreyklafter $= 75.\ 75.\ \frac{225}{4}$ Cubikzoll; Und wie der blos handwerksmässige Rechner eine Menge eines Maasses in eine Menge des andern verwandelt, giebt die verkehrte Regel Detri

$$72.\ 72.\ 54 : 75.\ 75.\ \frac{225}{4} = 5000 : Q$$

wo Q die Menge Landklaftern sind die zu 5000 Factoreyklaftern gehören. Und so was haben die Rechner nicht übereinstimmend berechnen können! Hr. B. hat diese Rechnung richtig vorgetragen auch Vortheile durch Aufheben der Zahlen, durch Logarithmen gezeigt, ohne das zu brauchen daß die Klaftern ähnliche Körper sind.

XII. Dieses ist nicht blos eine geometrische Bemerkung, hie giebt es auch eine ökonomische Lehre. Vorausgesetzt daß das Exempel wahr ist, hat die Factorey einen Fuß gebraucht der sich zum Landfusse $= 25 : 24$ verhielt, um einen halben Zoll des Landfusses länger war.

XIII. Das scheint mehr Vorsatz als Unachtsamkeit gewesen zu seyn. Man hat so zum Vortheile der Factorey mehr Holz messen wollen, aber vielleicht selbst nicht gedacht daß es soviel, mehr als 0,1 der Klafter betrüge, wenigstens werden das die Waldleute nicht gedacht haben, sondern sich eingebildet: ein halber Zoll mehr oder weniger habe nicht viel zu bedeuten.

XIIII. Da also der Landfuß $= \frac{24}{25} = 0{,}96$ des Factoreyfusses, so sind $6\frac{1}{4}$ Landfusse $= 6$ Factoreyfusse, und 56, 25 Landzoll $= 54$ Factoreyzoll $= 4$ F. 6 Zoll Factoreymaaß.

Hätte man also die Abmessungen der Factoreyklafter in ihrem Maasse angegeben, so wären genau eben die Zahlen gekommen in welchen die Abmessungen

gen der Landklafter angegeben sind. Also wäre jedem Geometer offenbahr gewesen daß die Klaftern ähnliche Körper waren, und sich wie die Würfel ihrer Fusse verhielten.

XV. Will man also ein Paar Körper vergleichen deren jeder nach einem andern Maasse gebildet ist, z. E. einer nach pariser, der andre nach rheinländischem, so wird besser seyn, jedes Abmessungen, in seinem Maasse anzugeben; da fällt ihre Verhältniß, zumahl wenn sie etwa ähnlich sind, leichter in die Augen: Auch werden jedes Abmessungen vermuthlich ganze Zahlen von den bey ihm gebrauchten Fusse, Zolle, allenfalls nicht gar zu kleiner Theile von Zollen, enthalten, da eben diese Abmessungen mit einem andern Maasse angestellt, natürlich auf Brüche führen, bey denen sich selbst nicht alle Kleinigkeiten so genau angeben lassen.

XVI. Man setze das Längenmaaß das für ein Parallelepipedum gebraucht wird sey = b; das für das andre = B; des ersten drey Seiten sind m. b; n. b; p. b; des andern seine M. B; N. B; P. B; des ersten Innhalt = a; des andern seiner = A; so ist $a = m.\ n.\ p.\ b^3$; $A = M.\ N.\ P.\ B^3$, also

$$A = \frac{M.\ N.\ P.}{m.\ n.\ p} \cdot \left(\frac{B}{b}\right)^3 \cdot a$$

Welches dient, einen der beyden Körper bequem mit dem andern zu vergleichen.

XVII. So ist z. E. die Calenberger Klafter (= a) 6 Calenberger Fuß (= m. b = n. b) breit und hoch, zuweilen nur 5 (= p. b) lang (von Münchhausen, Hausvater I. Th. 664. S.). Das Würtenberger Meß Holz (= A) 6 Würtenberger Fuß (= M. B = N. B) breit und hoch, 4 (= P. B) lang; der Calenbergische Fuß: Würtenb oder b: B = 1299: 1268, beyde in 1440 Theilchen des Pariser (Sprengers Anfangsgr. des Feldbaues I. Th. 388. S.).

Also $A = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{1268}{1299}\right)^3 \cdot a$

log 1268 = 3, 1031192
log 1299 = 3, 1136091

log (1268 : 1299) = 0, 9895101 — 1
dreymahl = 0, 9685303 — 1
log 0, 8 = 0, 9030900 — 1

log (A : a) = 0, 8716203 — 1
log (a : A) = 0, 1283797

Daher Meß = Kl. 0, 74408
Klafter = Meß. 1, 3439

XVIII. Das Exempel (I) hat zwar für jemand der Anfangsgründe der Geometrie versteht nichts schweres, es schien mir aber der angebrachten Umständlichkeit nicht unwerth, weil es zeigt, was Unwissenheit in diesen Anfangsgründen für Folgen hat, auch weil es solche allgemeinere Bemerkungen wie (XII; XV; XVI) veranlasst.

10. Zus. Die Anm. und der 3. Zus. des 42. S. finden auch hie statt.

Sonst lässt sich nach Art dessen, was dorten erinnert worden, der Beweis hie auch so führen. Man stelle sich vier rechtwinklichte Parallelepipeda vor, die ich mit A, B, C, D, bezeichnen will; Es habe ferner

A	die Seitenlinien	a	b	c
B		α	b	c
C		α	β	c
D		α	β	γ

Nun nehme man zur gemeinschaftl. Grundfläche

das Rechteck	b. c	bey	A	B
	α. c		B	C
	α. β		C	D

so

so ist aus 56. S. 2. Zus.

$$A : B = a : \alpha$$
$$B : C = b : \beta$$
$$C : D = c : \gamma$$

also (Ar. V, 50.) $A : D = a.b.c : \alpha.\beta.\gamma$ wodurch also der hiesige 8. Zus. zuerst bewiesen wird. Bedeutet also A das Parallelepipedum AG der 118. F. und D den Würfel dessen Seite AK ist, so ist $\alpha = \beta = \gamma$; und das Parallelepipedum verhält sich zum Würfel wie $abc : \alpha^3$ welches der Satz selbst ist.

58. Satz. Aufgabe.

Ein schiefes Parallelepipedum 112. F. auszurechnen.

Aufl. Von einem willkührlichen Puncte c seiner obern Grundfläche fälle man auf die Ebene der untern AC; ein Loth cM. Man messe dieses, und finde den Innhalt der Grundfläche in Quadraten eben dieses Maasses; das Product aus dem Innhalte der Grundfläche in die Höhe giebt den Innhalt des Parallelepipedi oder die Menge von Würfeln in ihm, die dieses Maaß zur Seite haben. Es ist willkührlich, welche von den sechs Flächen man zur Grundfläche nehmen will.

Exempel. Es sey $cM = 7^{\circ}$; $DC = 9'$ und ein Perpendikel von A auf DC sey $= 5'\,7''$ so setzt man $cM = 700''$; $DC = 90''$ und den Innhalt der Grundfläche $ABCD = 57.90 =$

5130. Quadratzoll; also des Körpers Innhalt = 5130. 700 = 3591000. Cubikzoll = 3591. Cubikfuß = 3. Cubikruthen, 591. Cubikfuß. Oder nach den zehntheilichten Brüchen kömmt die Ruthe = 1 gesetzt; der körperliche Innhalt = 0,9 · 0,57. 7 = 3,591. wie vorhin. Wäre das Maaß zwölftheilichtes gewesen; so hätte man alles auf Zolle so bringen müssen, daß der Innhalt = 9. 12. (5. 12 + 7). 7. 12. 12 gekommen wäre.

1. Zus. Die Höhen von zweyen Parallelepipedis seyn a; α, ihre Grundflächen, dem Innhalte nach, wie die Aufgabe lehrt, berechnet = b, β; so sind die körperlichen Räume ab; $\alpha\beta$, in der Verhältniß a: α + b: β.

2. Zus. Sind beyde Parallelepipeda gleich, so ist a: α = β: b.

3. Zus. Ist a = α; so ist die Verhältniß der Räume = β: b; oder = a: α wenn b = β.

59. Satz. Lehrsatz.

Ein dreyeckigtes Prisma FCGHBE 118. F. ist halb so groß als ein Parallelepipedum, das mit ihm einerley Höhe, und eine noch einmahl so grosse Grundfläche hat.

Bew. Man ziehe FD, CD, mit CG, FG. und EA, BA, mit BH, EH, parallel, so entstehen zwey Parallelogrammen GD, HA; von denen des Prisma Grundflächen die Hälften sind.

Nun

Digitized by Google

Nun sind FG, EH; (II. Th. 4. Erkl.) und verm. der Verzeichnung DC, FG, also auch DC, EH (46. S. 1. Z.) folglich auch DC, AB; und eben so, DF, AE, also AD; BC; FE, GH gleich und parallel; (12. S. 3. Z.) und DB, FH; DE, CH; gleiche und parallele Parallelogrammen, (53. S. 4. Z.) also machen DB und EG, mit der Ebene FB gleiche Winkel (47. S. 6. Z.). Man lege also das Prisma FCDABE dergestalt auf das andere, daß die Fläche FCBE auf sich selbst, nur in verkehrter Lage, nähmlich C, F, E, B, auf F, C, B, E, fällt, so fällt die FEAD in die Ebene CBHG, (47. S. 5. Z.) und die genannten Puncte fallen in dieser Ordnung auf einander; d. i. beyde Prismata decken einander; daß sie aber aneinander gesetzt ein Parallelepipedum ausmachen, erhellt aus dem bisherigen Beweise selbst.

1. Zus. Ein dreyeckichtes Prisma auszurechnen, multiplicire man seine Höhe mit seiner Grundfläche; dem ΔEHB denn dieses giebt halb so viel als eben die Höhe mit EHBA multiplicirt, und das letzte Product gäbe das Parallelepipedum, dessen Hälfte das Prisma ist.

2. Zus. PQRST tsrqp sey ein vieleckichtes Prisma 119. F. Man ziehe in seinen beyden Grundflächen aus ähnlichliegenden Puncten R, r, Diagonalen RP, RT, rp, rt; jede zwo, die nach ähnlichliegenden Puncten in beyden Grundflächen zu gehen, sind parallel, nähmlich RP, RT

mit rp; rt; weil alle Seiten des Prisma parallel und gleich sind (53. S.). Folglich geben die Diagonalflächen Rp; Rt, mit den Seitenflächen, soviel dreyeckichte Prismata, soviel Dreyecke die Diagonallinien, in jeder Grundfläche geben. Also lässt sich ein vieleckichtes Prisma in lauter dreyeckichte theilen, die alle eine Höhe haben.

3. Zus. Diese dreyeckichten liessen sich einzeln berechnen, und ihre Summe gäbe den Innhalt des vieleckichten. Man findet diesen aber auf einmahl, wenn man die Summe aller ihrer Grundflächen, d. i. die ganze Grundfläche des vieleckichten, in die gemeinschaftliche Höhe multiplicirt.

4. Zus. Der Innhalt eines Cylinders ist ein Product aus seiner Höhe in seine Grundfläche (41. S. 3. Zus.).

5. Zus. Die Summe der Seitenflächen Pq; Qr; Rs, St, Tp, findet sich, wenn man diese Parallelogrammen einzeln ausrechnet und zusammen addirt. Ist es ein senkrechtes Prisma, so sind die Seitenflächen Rechtecke alle von einer Höhe (53. S. 2. Z.) und ihre Summe ist ein Product aus dieser gemeinschaftlichen Höhe in die Summe aller Grundlinien pq + qr + rs + st + tp; d. i. in dem Umfang der Grundfläche.

6. Zus. Die runde Seitenfläche eines senkrechten Cylinders (52. S. 11. Z.) ist ein Product aus seiner Höhe in den Umfang seiner Grundfläche

fläche (53. S. 12. Z. und 41. S. 4. Z.). Wenn also die Höhe = b; der Durchmesser = d ist; so ist die krumme Seitenfläche = bdP (44. S.); und der körperliche Innhalt = $\frac{bd^2 . P}{4}$. Die krumme Fläche, versteht sich, ohne die beyden Grundflächen, die als Ebenen, nach 44. S. berechnet werden.

7. Zus. Stünde über dem Kreise PO 68. F. ein senkrechter oder schiefer Cylinder, und über NQ ein anderer, der mit jenem einerley Axe hätte; und wäre ihre gemeinschaftliche Höhe = b; so wäre der innere = $br^2 . P$ der äusere b. $R^2 . P$ (44. S. 10. Z.). Wenn man also den innern aushöhlte, so wäre der übrigbleibende cylindrische Ring = $bP. (R^2 - r^2)$. Es erhellet, daß man auf gleiche Art ein hohles Prisma durch ein Product aus seiner Höhe in den noch übrigen vollen Theil der Grundfläche berechnet.

8. Zus. Ein anderer Cylinder, dessen Höhe β, der Durchmesser δ wäre, bekäme zum Innhalte $\frac{\beta\delta^2 . P}{4}$ also stünden die beyden (6. und 8. Z.) in der Verhältniß $bdd : \beta\delta\delta = (b : \beta) + (dd : \delta\delta)$.

9. Zus. Sind sie gleich, so ist $b : \beta = \delta\delta : dd$.

10. Zus. Sind die Höhen gleich, so ist der Cylinder Verhältniß = $dd : \delta\delta$; einerley mit

Digitized by Google

der Verhältniß ihrer Grundflächen (44. S. 11. Z.).

11. Zuſ. Der beyden Cylinder (6. und 10. Z.) Summe iſt $\frac{b.P}{4}$. $(dd + \delta\delta) =$ einem Cylinder deſſen Durchmeſſer $= \sqrt{(dd + \delta\delta)}$ oder deſſen Grundfläche die Summe jener beyden Grundflächen wäre (44. S. 2. Z.).

12. Zuſ. Hierauf gründet ſich die Verfertigung des Viſirſtabes. Ein Cylinder von der Höhe KL; dem Durchmeſſer LM 120. F. halte ein gewiſſes Maaß, z. E. eine Kanne. Man nehme auf einem rechten Winkel; AB = A1 = LM ſo iſt B1; der Durchmeſſer eines cylindriſchen Gefäſſes, das unter eben der Höhe KL; zwo Kannen hält; Man uehme A2 = B1; A3 = B2; A4 = B3; u. ſ. w. ſo ſind A3; A4; u. ſ. w. Durchmeſſer von Gefäſſen, die unter eben der Höhe 3; 4; 5; u. ſ. w. Kannen halten.

13. Zuſ. Den Innhalt des Cylinders NOP zu finden; ſuche man mit dem Viſirſtabe, wieviel Kannen auf ſeiner Grundfläche in der Höhe OQ = KL ſtehen können; dieſe Zahl nehme man ſo vielmahl, als die Höhe OQ in der Höhe ON enthalten iſt.

Anm. Ein Faß ACabDB 121. F. fällt zwiſchen zweene Cylinder von gleicher Länge Aa; deren einer die Boden des Faſſes zu Grundflächen, alſo AB = ab zu Durchmeſſern hat, des andern Durchmeſſer iſt die Spundtiefe CD = EF = ef; Beyde laſſen ſich aus

aus 13. Zuf. finden; und man kann annehmen, das Faß sey das arithmetische Mittel zwischen beyden; ob sich dieses gleich nicht erweisen läßt, weil das Faß unzählige Gestalten haben kann, bey denen die Puncte A; C; a; b: D; B; unverrückt bleiben. Genauere Bestimmungen lassen sich aus der Algebra finden, wenn die völlige Gestalt des Fasses als gegeben angesehen wird. Man hat auch Visirstäbe, die sogleich ohne Rechnung den Innhalt des Fasses angeben; sie setzen aber gewisse Verhältnisse der Durchmesser eines Fasses zum voraus, und sind also nur an einem Orte, wo Fässer nach diesen Verhältnissen gebunden werden, zu gebrauchen. Fässer, die nicht voll sind, zu visiren, lehrt ebenfalls die Algebra.

Es ist also noch vielmehr, als blos die bisherige Ausrechnung des Cylinders nöthig, einige nachstehender die Visirkunst betreffender Schriften zu brauchen. Ich erinnere noch, daß Visirkunst oft, überhaupt für Ausmessung der Körper gebraucht wird.

Kepler, Stereometria doliorum 1615. Dessen Auszug aus der Uralten Messekunst Archimedis Linz 1616. Knödel Kern der Visirkunst Leipz. 1675. Beutel geometrischer Lustgarten 461 u. f. S. Io. Hartm. Beyer. Reip. Francof. Medici Stereometriae inanium nova et facilis ratio Frankf. 1603. Dess. Tractat von der lang gesuchten und gewünschten Visirung des vollen und leeren Stücks eines Weinfasses 1619. Ist Prinz Moriz von Oranien zugeschrieben, daher auch Conometria Mauritiana betitelt. Dess. Bericht von Zubereitung einer Visirruthen aus einem geeichten Weinfaß. Dessen Kunstrechnung der zehntheilichen Brüche 1619. (Ist in Deutschland durch ihn vornehmlich zuerst auf praktische Ausrechnungen angewandt worden). Georg Virscher, Additamentum Operis Coleri Oeconomici, Ein geometrischer Hauswirthsstab 1624. M. Christian Martini 2 Disputationen zu Wittenberg 1723, die erste unter Hase: Pitho-

Digitized by Google

Pichometriae s. dollor. mensurae theoria nova algebrae ope erutа. Roennbergs erfundne leichte und richtige Ausmessung der Fässer welche nach der Länge liegen und nicht voll sind Wismar 1747. Lambert Beyträge zum Gebrauch der Mathematik I. Th. 314. S. Nimmt den Durchschnitt der krummen Oberfläche des Fasses durch seine Axe, für einen Kreisbogen an. Seine Formel auf Proportionirung der Fässer angewandt beym v. Florencourt, Abhandlungen aus der juriſt. und polit. Rechenkunst 252. S. Faggot von Ausmessung runder Gefässe, Abhandl. der königl. schwed. Akad. der Wissensch. 1743. Camus Instrument propre à jauger les tonneaux Mem. de l' Ac. des Sc. 1741. Pezenas, Auflösung der Keplerischen Aufgabe, das Verhältniß der Faßschnitte betreffend; aus den Memoires prélentés à l'Ac. d. Sc. übersetzt von Beer, auserlesene Abhandlungen .... II. Theil Leipz. 1754. Anweisung den Innh. cyl. und cub. Gefässe auch nicht voller Fässer zu berechnen 1774. Von Ausmessung der gewöhnlichen Wein- und Tonnengefässe, Plantin Abhandl. der königl. schwed. Akad. der Wissensch. 1774. 160. S. meiner Ueb. Marelius, Abh. 1776; 1. S. wo ich 27. S. zur Berechnung und zur Litteratur Zusätze gegeben habe.

60. Satz. Lehrsatz.

Wenn eine Pyramide ABGD, 122. F. mit einer Ebene der Grundfläche BGD parallel geschnitten wird, so ist der Schnitt PKT der Grundfläche ähnlich.

Bew. In jeder Seitenfläche der Pyramide wie ABG; geht die Seite des Durchschnittes PK mit der Seite der Grundfläche BG, parallel (II. Th. 2. Erkl. Zus.) also machen zwo zusammenstossende Seiten des Durchschnittes PK; KT,

Digitized by Google

KT, eben den Winkel PKT, den die unter ihnen liegenden beyden Seiten BG; GD, der Grundfläche machen (46. S. 2. Z.). Es ist ferner PK : BG = AK : AG = KT : GD (26. S.) also PK : KT = BG : GD; Also folgen proportionirte Seiten, und gleiche Winkel in einerley Ordnung im Schnitte und in der Grundfläche, d. i. beyde Figuren sind ähnlich.

1. Zus. Man lasse von der Spitze A auf die Grundfläche das Loth AC herab, welches auf dem Schnitte in Z auch senkrecht stehet (46. S. 10. Z.) BC; PZ, sind der Ebene BAC Durchschnitte mit den beyden parallelen Ebenen, und also parallel, (II. Th. 2. Erkl. Zus.) und AZ : AC = AP : AB = AK : AG = PK : BG.

2. Zus. I. Es sey AZ = x; AC = f; die Fläche des Schnittes PKT = S die Grundfläche BGD = B; so ist B : S = BGq : PKq (42. S. 22. Z.) = $f^2 : x^2$ (1. Z.) oder $S = \frac{Bx^2}{ff}$.

II. Es sey pkt ein anderer Durchschnitt, dessen Innhalt = s und seine Entfernung von der Spitze sey Az = x + e; so ist $s = B. \frac{(x+e)^2}{ff}$

wo Zz = e.

3. Zus. I. Es sey um C, mit dem Halbmesser CB ein Kreis beschrieben, in dessen Umfange sich alle Scheitel der Winkel der Grundfläche, G, B u. s. w. wenn die Grundfläche mehr Winkel hat befinden.

II.

Digitized by Google

II. Damit wird nicht gesagt daß die Grundfläche eine reguläre Figur sey. Denn selbst das Dreyeck das die 122. Fig. darstellt könnte ungleichseitig seyn, (17. S. 1. Zus.) und überhaupt kann man ja in einem Kreise der mit CB beschrieben wäre, eine Menge Sehnen ziehn, die zusammen eine ganz unordentliche Figur einschliessen.

III. Ist indessen CA auf die Ebene dieses Kreises, durch seinen Mittelpunct senkrecht, so sind alle Linien, von A nach Puncten in seinem Umfange, gleich lang, jede $= \sqrt{(CA^2 + CB^2)}$.

IIII. Linien von der Spitze der Pyramide nach den Winkeln ihrer Grundfläche; Seiten der Dreyecke welche die Pyramide begränzen, mögen Seiten der Pyramide heissen in der Bedeutung wie beym Prisma (53. Satz und Anm. das.)

V. So kann man die Pyramide (III) gleichseitig nennen.

VI. CA sey noch auf die Ebene der Grundfläche senkrecht, aber die Grundfläche sey nicht eine Figur in einem Kreise um C. So sind nicht alle Linien von C an die Winkel der Grundfläche gleich lang, folglich auch nicht alle Linien von der Spitze der Pyramide an diese Winkel: Sie ist also ungleichseitig.

VII. Die gleichseitige (V) kann in Dreyecke eingeschlossen die ungleiche Grundlinien haben

(II)

Digitized by Google

(II) obgleich ihrer aller Schenkel, die von der Spitze ausgehn, gleich sind.

VIII. Hat aber die Grundfläche in (II) lauter gleiche Seiten, so ist sie eine ordentliche Figur (23. S.) und der Pyramide Seitenflächen sind lauter gleichschenklichte Dreyecke mit gleichen Grundlinien, also alle einerley.

VIIII. Die beyden gleichseitigen Pyramiden (II; IX) unterscheiden sich also durch ungleiche oder gleiche Seitendreyecke.

X. Wenn des ordentlichen Vielecks (IX) Seiten immer mehr und sie immer kleiner werden, bis es sich in den Kreis verliehrt (43. S. 3. Zus.) so nähert sich die Pyramide (IX) mehr und mehr dem senkrechten Kegel, (8. Erkl.) in den sie sich also auch endlich verliehrt. Man könnte sie also mit Nachahmung des beym Kegel eingeführten Beywortes, senkrecht nennen. Ihre Höhe könnte in einer gewissen Bedeutung auch Axe heissen, jede Ebene durch diese Axe, theilt diese Pyramide in ähnliche Hälften, das thut nicht jede Ebene durch die Höhe der gleichseitigen schiefen Pyramide (II).

XI. Noch mehr verdient den Nahmen einer schiefen die ungleichseitige (VI) deren Spitze selbst so liegen kann, daß ein Loth von ihr auf die Ebene der Grundfläche, auserhalb der Gränzen der Grundfläche fällt.

XII. Die Grundfläche kann eine ordentliche Figur seyn, deren Mittelpunct nicht in dem Lo-

the

Digitized by Google

ihr von der Spitze auf ihre Ebene liegt. Dann ist die Pyramide doch ungleichseitig (VI).

XIII. Die senkrechte Pyramide ist auch gleichseitig, die schiefe kann gleichseitig oder ungleichseitig seyn.

4. Zus. I. Im Kegel 125. F. sey AC die Axe und CB der Grundfläche Halbmesser; durch einen willkührlichen Punct der Axe Z lege man eine Ebene mit der Grundfläche parallel, so wird derselben Durchschnitt PZ mit der Ebene BCA; dem Halbmesser BC parallel seyn (II. Th. 2. Erkl. Zus.). Also ist AC: AZ = BC: PZ. Nun kann B jeden Punct in der Grundfläche Umkreis bedeuten, und die Längen der Linien AC, AZ, BC, bleiben allemahl einerley: folglich behält auch PZ einerley Länge, d. i. wenn von des Kegels Spitze nach jedem Puncte im Umfange der Grundfläche eine gerade Linie gezogen wird, deren Puncte alle also in der Fläche des Kegels liegen, so ist der Punct dieser Linie, der in der Ebene durch Z lieget, im Umfange eines Kreises, dessen Mittelpunct Z ist. Dieser Kreis geht also durch alle Puncte der Kegelfläche, die in der Ebene durch Z liegen, d. i. er ist dieser Ebene Durchschnitt mit der Kegelfläche. Alle Querschnitte des Kegels sind also Kreise, deren Mittelpuncte in der Axe liegen. Im senkrechten Kegel sind PZC, ACB rechte Winkel; (46. S. 10. Z.) und er entstehet also, indem sich das rechtwinklichte Dreyeck ABC, um AC drehet.

II.

Digitized by Google

II. Eine Linie wie AB heißt des Kegels Seite. Im senkrechten Kegel ist sie $= \sqrt{(ACq + BCq)}$ und also von unveränderlicher Länge, B mag ein Punct des Umkreises seyn welcher es will. Im schiefen aber ist von dem Puncte, wo das Loth von der Spitze in die Grundfläche trifft, nicht an alle Puncte des Umkreises gleich weit. Daher heißt jener Kegel auch gleichseitig (aequilaterus) dieser ungleichseitig (scalenus). In jenem nähmlich ist A wie der Pol der Grundfläche und jedes ihr parallelen Kreises (49. S. 9. Z.). Wenn Bb ein unendlich kleiner Bogen ist, so ist ABb eine unendlich schmahle Ebene, dergleichen unzählig viele ringsherum die Kegelfläche ausmachen. Also ist der Kegel eine Pyramide von unzählig viel Seiten.

III. Eine Ebene durch AC, des Kegels Axe, schneidet die Grundfläche in irgend einem Durchmesser BD; In ihr sind also die beyden gegenüberstehenden Seiten des Kegels AB, AD; und sie schneidet den Körper des Kegels in zwey Stükken, welche das Dreyeck durch die Axe BAD gemein haben.

IIII. Beym gleichseitigen Kegel (II) sind alle diese Dreyecke, gleichschenklicht und gleich.

V. In jedem von ihnen (IIII) ist der Winkel BAC, spitzig, ein rechter, oder stumpf, nachdem die Höhe CA, grösser, so groß, oder kleiner, ist als der Halbmesser CB.

Digitized by Google

Nähmlich wenn CB = CA, ist BAC = 45 Grad, beträgt weniger oder mehr, nachdem CB kleiner oder gröſſer ist: Und in (IIII) ist BAD = 2. BAC.

VI. Dieſem gemäß nennt man den gleichſeitigen Kegel, nach dem Winkel an ſeiner Spitze, ſpitzwinklicht, rechtwinklicht, ſtumpfwinklicht.

VII. Man kann ſich von der krummen Fläche des Kegels vorſtellen, ſie werde beſchrieben, wenn ſich eine gerade Linie AB ſo dreht, daß ſie immer durch A geht, und ein anderer Punct von ihr ſich immer in einem Kreiſe befindet der C zum Mittelpuncte, CB zum Halbmeſſer hat. So kömmt dieſe Linie in die Lage jeder Seite des Kegels.

VIII. Verlängert man BA über A aufwärts, und nimmt auf dieſer Verlängerung von A ein Stück = AB, ſo beſchreibt dieſes zugleich mit AB, völlig eben den Kegel über A.

VIIII. So entſtehn allemahl zuſammen zweene gleiche und an einer Spitze entgegengeſetzte Kegel.

X. Jeder kann ſo groß als man will, bis ins unendliche gedacht werden, weil man ſich AC ſo lang als man will denken, und allemahl durch C einen Kreis in einer Ebene denken kann, die der einmahl angenommenen Ebene der Grundfläche parallel iſt.

XI. Wenn die Lage der Linie CA, und der Halbmeſſer der Grundfläche ungeändert bleiben,

der

Digitized by Google

der Punkt A aber sich immer weiter und weiter von C entfernt, so kommen die Linien CA, BA, Parallelen immer näher und näher, (wie 12. S. 12. Z.) werden sie völlig parallel, so verwandelt sich der Kegel in einen Cylinder (53. S. 8. Z.) den man also als einen Kegel, dessen Axe unendlich ist, ansehen kann.

5. Zus. Das Pyramidenstücke KPT tkp ist grösser als ein Prisma, dessen Grundfläche PKT, kleiner als eines, dessen Grundfläche pkt wäre, wenn beyde e zur Höhe hätten. Also ist seine Grösse von jeder dieser Prismatum weniger unterschieden, als diese Prismata selbst unterschieden sind. Nun sind diese beyden Prismata e. S. und e. s, also ihr Unterschied e. (s—S) welcher sich zu dem kleinsten e. S. wie s—S: S verhält; d. i. wie $\frac{B.(x+e)^2-x^2)}{f^2} : \frac{Bx^2}{f^2}$ (2. Z.) $= (2x+e).\ e: x^2$ (Arithm. IIII. 1. und V. 21.) weil nun $2x+e$ immer weniger und weniger von $2x$ unterschieden ist, je kleiner man e annimmt, so kann des ersten Gliedes erster Factor der Grösse $2x$; und die Verhältniß selbst der Verhältniß $2xe: xx = 2e: x$ so nahe kommen als man will; Aber eben die Veränderung von e, macht auch, daß in der Verhältniß $2e: x$ das erste Glied in Vergleichung mit dem andern immer weniger und weniger beträchtlich wird; und weil e immer abnehmen kann,

ohne daß sich x ändert, so kann e in Vergleichung mit x geringer werden als jede andere Grösse, die sich mit x vergleichen läßt; d. i. es kann wie unendlich klein oder als nichts in Vergleichung mit x angesehen werden; Also kann man e allemahl so klein annehmen, daß der Unterschied beyder Prismatum in Vergleichung mit dem kleinsten, für nichts zu achten ist: folglich wird er in diesem Falle auch in Vergleichung mit dem Pyramidenstücke für nichts zu achten seyn; d. i. man kann, welches Prisma von beyden man will, für das Pyramidenstück annehmen, und solches also $= e.S = \frac{Bx^2}{ff}.e$ setzen, ohne daß der Fehler, den man dadurch begehet, indem man solchergestalt für das Pyramidenstück etwas kleineres setzt, mit der Grösse, die man bestimmen will, mit dem Pyramidenstücke, in einige Vergleichung käme; Hiezu wird nur erfodert e kleiner als jede Grösse die sich bestimmen läßt; d. i. pkt unendlich nahe bey PKT anzunehmen. Und so wird begreiflich werden, daß man sich die Höhe AC in eine unzählige Menge unendlich kleiner Theile getheilet, und durch alle diese Theilungspuncte Ebenen gelegt vorstellen kann; da allemahl die beyden nächsten ein Pyramidenstück zwischen sich enthalten werden, das man für ein Prisma annehmen darf. Alle diese Prismata zusammen machen also die Pyramide aus. Aber die Art ihre Sum-

me

Digitized by Google

me zu finden, da sie beständig um unendlich kleine Unterschiede, von der Spitze herab gröſſer werden, läſſt sich aus den bisherigen Gründen nicht erklären; daher muß ich diese Begriffe auf eine andere Art anwenden, die Ausrechnung der Pyramide daraus herzuleiten.

61. Satz. Lehrsatz.

Gleich hohe Pyramiden und Kegel über einer Grundfläche sind gleichen Innhaltes.

Beyw. Ueber der Grundfläche $\beta\gamma\delta$ die der BGD gleich und ähnlich ist, stehe eine Pyramide, deren Spitze x von der Grundfläche um die Höhe AC entfernt sey; Man setze beyde Grundflächen in eine Ebene an einander oder auf einander, und lasse die Ebenen PKT, pkt, in der andern Pyramide die Schnitte ΠKT, $\pi\varkappa\tau$, machen, deren Entfernung auch e seyn wird; und die ein Pyramidenstück = e. ΠKT geben werden (61. S.). Aber $\Pi KT = \frac{Bxx}{ff}$ weil sich hie alle die Schlüsse vollkommen anbringen lassen, die man bey PKT gemacht hat; Also sind beyde Pyramidenstücke gleich. Da nun jedes e zwey solche gleiche Stücken giebt, und in beyder Pyramiden Höhen gleichviel e genommen werden können, wenn die Höhen gleich sind, so sind beyde Pyramiden, Summen gleichgrosser und gleichvieler Stücken, d. i. gleichen Innhaltes. a

Digitized by Google

62. Satz. Lehrsatz.

Ein dreyeckichtes Prisma ABCFED 123. F. läßt sich in drey Pyramiden gleichen Innhalts theilen;

Bew. Man schneide es durch CDA und CDE; So entstehen die Pyramiden ABCD; CDEA; ECDF; die erste und zweyte haben gleiche und ähnliche Grundflächen BAD; ADE; und die Spitzen beysammen in C; die zweyte und dritte; gleiche und ähnliche Grundflächen ACE, FEC, und die Spitzen beysammen in D; also sind alle drey gleich (61. S.).

1. Zus. Ueber jedem Dreyecke BGD 122. F. lassen sich eine Pyramide und ein Prisma von gleicher Höhe (53. S.) aufrichten; von dem also die Pyramide ein Drittheil ist. Folglich ist jeder dreyeckichten Pyramide ABGD Innhalt = $\frac{1}{3}$ B. f (61. S.).

2. Zus. Eine vieleckichte Pyramide ABCDEF 124. F. wird in so viel dreyeckichte an einer Spitze ABCD; ADEF; ABDF; zertheilet, so viel Dreyecke sich in der Grundfläche durch Diagonalen aus einem Punete machen lassen; Heisst also ihre gemeinschaftliche Höhe, oder ein Perpendikel AR von A auf die ganze Grundfläche wieder f, so ist die Summe dieser einzelnen Pyramiden, oder die ganze = $\frac{1}{3}$ f (ΔBCD + ΔDEF + ΔBDF) = $\frac{1}{3}$ f. BCDEF.

3. Zus.

Digitized by Google

3. Zus. Ein Kegel 125. F. dessen Höhe = f der Grundfläche Durchmesser = d ist, hat zum Innhalte $\frac{1}{3}$ f. $\frac{d^2 P}{4}$ (44. S.).

4. Zus. Die abgekürzte Pyramide BPTDGK; 122. F. ist = $\frac{1}{3}$ f. B − $\frac{1}{3}$ x. S (3. Zus. und 61. S. 2. Zus.) = $\frac{1}{3}$. fB − $\frac{1}{3}$ x. $\frac{Bx^2}{ff}$ (62. S. 2. Z.) = $\frac{1}{3}$ B. (f − $\frac{x^2}{ff}$ x); Wenn aber das obere Stück APKT der Pyramide fehlt, so kann man x nicht unmittelbar messen. Den Abstand der obern Fläche von der untern, oder die Höhe des Pyramidenstücks, wird man wissen können; Sie sey CZ = y. Man suche also aus dem gefundenen Ausdrucke f, x, wegzuschaffen oder diese Grössen durch B, S, y, auszudrucken, weil man diese drey letztern, bey jedem vorkommenden Pyramidenstücke leicht messen kann. Nun ist $\frac{x^2}{f^2} = \frac{S}{B}$ (60. S. 2. Z.) also $\frac{x}{f} = \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{B}}$ (Ar. IIII. 45.) oder $x = \frac{f\sqrt{S}}{\sqrt{B}} = f - y$, folglich mit $\sqrt{B}$ multiplicirt; $f\sqrt{S} = f\sqrt{B} - y\sqrt{B}$; und $y\sqrt{B}$ auf beyden Seiten addirt, aber $f\sqrt{S}$ abgezogen; $y\sqrt{B} = f\sqrt{B} - f\sqrt{S} = f.(\sqrt{B} - \sqrt{S})$ daher $\frac{y\sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{S}} = f$,

Digitized by Google

und $x = \frac{y\sqrt{B}}{\sqrt{B}-\sqrt{S}} \cdot \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{B}} = \frac{y\sqrt{S}}{\sqrt{B}-\sqrt{S}}$;

Also verwandelt sich $f - \frac{x^2}{f^2} \cdot x$ in $\frac{y\sqrt{B}}{\sqrt{B}-\sqrt{S}} - \frac{S}{B} \cdot \frac{y\sqrt{S}}{\sqrt{B}-\sqrt{S}}$ das ist diese beyden Brüche auf einerley Benennung gebracht in $\frac{yB\sqrt{B}-yS\sqrt{S}}{B.(\sqrt{B}-\sqrt{S})}$ oder in $\frac{y(B\sqrt{B}-S\sqrt{S})}{B(\sqrt{B}-\sqrt{S})}$; dieses also, mit $\frac{1}{3}B$ multiplicirt, giebt den Innhalt des Pyramidenstücks $= \frac{1}{3}y \cdot \frac{B\sqrt{B}-S\sqrt{S}}{\sqrt{B}-\sqrt{S}}$.

Man könnte schon diesen Ausdruck gebrauchen. Er läßt sich aber noch etwas bequemer einrichten, wenn man aus dem Factor der in $\frac{1}{3}y$ multiplicirt ist, das Irrationale des Nenners wegschafft, weil mit Irrationalzahlen zu dividiren noch viel beschwerlicher ist, als damit zu multipliciren. Das wird geschehen, wenn man des erwähnten Factors Nenner mit $\sqrt{B}+\sqrt{S}$ multiplicirt, denn da wird aus ihm $B-S$ (Ar. II. 5.). Man muß aber alsdenn eben damit auch den Zähler multipliciren. Man verrichte also diese Multiplication.

$$\begin{array}{l} B\sqrt{B}-S\sqrt{S} \quad \text{mult. mit} \\ \sqrt{B}+\sqrt{S} \quad \text{giebt} \\ \hline B^2-S\sqrt{B}\sqrt{S}+B\sqrt{B}\sqrt{S}-S \end{array}$$

Aber

Aber $\sqrt{B} \cdot \sqrt{S} = \sqrt{B.S}$ (Ar. II. 15.) also ist das nur gefundene Product $= B^2 - S^2 + (B - S) \cdot \sqrt{BS}$ und weil $B^2 - S^2 = (B+S) \cdot (B-S)$ (Ar. II. 5.) so wird eben dieß nur gefundene Product $= (B+S+\sqrt{B.S}) \cdot (B-S)$ daher läßt sich der in $\frac{1}{3}y$ multiplicirte Factor, so ausdrucken: $\frac{(B+S+\sqrt{B.S}) \cdot (B-S)}{B-S}$ und der Ausdruck des Pyramidenstücks wird $\frac{1}{3}y \cdot (B+S+\sqrt{B.S})$.

Da nun die beyden Grundflächen B, S, bey einem vorgegebenen Pyramidenstücke, sich ausrechnen lassen, so kann man aus ihrem Producte die Quadratwurzel ziehen, diese zur Summe addiren, und alles zusammen in $\frac{1}{3}y$ multiplicirt.

So hat Jacob Bernoulli diese Berechnung schon 1687. vorgetragen Op. Jac. Bern. T. I. p. 311. Mir ist noch eine andere Einrichtung dieser Formel beygefallen, welche die Bequemlichkeit hat, daß man keine Quadratwurzel dabey ausziehen darf. Man nehme ein paar auf ähnliche Art bestimmte Linien (42. S. 23. 3.) in beyden Grundflächen; Dergleichen wären ZP, CB 122. F. wenn man wüsste daß ein Loth von der Spitze der Pyramide die Grundflächen in Z; C, schnitte; Am natürlichsten ist es ein paar ähnlichliegende Seiten z. E. PK, BG, dazu zu wählen. Diese kann man, wenn das Pyramidenstück vorgegeben wird, gewiß messen, und die

untere Grundfläche auch. Die beyden Linien mögen n in der obern, m in der untern heissen; so ist (42. S. 22. 23. Z.) $B : S = m^2 : n^2$ also $S = \frac{n^2 B}{m^2}$ und $B . S = \frac{n^2 B^2}{m^2}$ und (Ar. I. 77.) $\sqrt{B . S} = \frac{nB}{m}$; also das Pyramidenstück $= \frac{1}{3} y . (B + \frac{n^2}{m^2} . B + \frac{n}{m} B) = \frac{1}{3} y B . (1 + \frac{n}{m} + \frac{n^2}{m^2})$.

5. Zus. Bey einem senkrechten Kegel 125. F. sind Z, C. der beyden Grundflächen Mittelpuncte, und $CB = R$; $ZP = r$, ihre Halbmesser auch ist $B = R^2 . P$; $S = r^2 . P$ (44. S.) folglich $B . S = R^2 . P . r^2 . P = R^2 . r^2 . P^2$ daraus die Quadratwurzel $= R . r . P$ (Ar. II. 15.) also der abgekürzte Kegel $= \frac{1}{3} y . (R^2 P + r^2 P + R r P) = \frac{1}{3} y . P . (R^2 + Rr + r^2)$.

Anm. I. Eine gemeine Regel abgekürzte Pyramiden zu berechnen, giebt für derselben Innhalt $\frac{B + S}{2} . y$ an; wieviel dieser falsche Innhalt den wahren übertrifft, lässt sich so berechnen

der falsche	$\frac{1}{2} By + \frac{1}{2} Sy$
der wahre	$\frac{1}{3} By + \frac{1}{3} Sy + \frac{1}{3} y \sqrt{BS}$
Ueberschuß des falschen	$\frac{1}{6} By + \frac{1}{6} Sy - \frac{1}{3} y \sqrt{BS}$
oder	$\frac{1}{6} y \left(\frac{B + S}{2} - \sqrt{BS} \right)$

Das $2\sqrt{SB} < B + S$ und also der falsche Innhalt grösser ist, erhellt daraus weil $(\sqrt{B} - \sqrt{S})^2 = B - 2$

$= 2\sqrt{BS} + S$. Nun wäre das Quadrat von $\sqrt{B} - \sqrt{S}$ bejaht, wenn gleich seine Wurzel verneint wäre (Ar. I. 105.) (hie ist aber auch die Wurzel bejaht weil $S < B$). Folglich muß dieses Quadrats verneinter Theil kleiner als sein bejahter oder $2\sqrt{BS} < B + S$ seyn.

Für $S = B$ ist der Fehler $= \frac{1}{3} y \cdot \left(\frac{B+B}{2} - \sqrt{BB} \right)$ $= 0$ aber für $S = 0$ wenn nähmlich das Pyramidenstück sich in die ganze Pyramide verwandelt und $y = L$ wird er $\frac{1}{3} L \cdot \frac{1}{2} B$. Der Fehler ist also wie sich durch die Differentialrechnung umständlicher zeigen läßt, nur klein, wenn B und S wenig unterschieden sind oder das Pyramidenstück nicht hoch ist, er wird immer gröſſer, je gröſſer die Höhe des Stücks in Vergleichung mit der Höhe der ganzen Pyramide wird, und kann so bis zur Hälfte der ganzen anwachsen.

II. Abgekürzte Pyramiden zu berechnen, kömmt unter andern in der Fortification vor, wenn man den körperlichen Innhalt der Vestungswerke wissen will. Daß Schildknecht I. Th. 6. E. über diejenigen lacht die hie gar zu genau rechnen, ist diesem lustigen Schriftsteller leicht zu verzeihen und hat etwas wahres zum Grunde; wobey er doch bedenken sollen, daß man eine Regel deren Falschheit man zugiebt, nur alsdenn brauchen darf, wenn man sicher ist daß sie nicht mehr fehlt als man sich zu fehlen verstatten will: daß aber noch jetzo auch Lehrer der Mathematik die nur angezeigte falsche Berechnung vortragen, und wohl der wahren als gleichgültig ansehen, ist desto weniger zu entschuldigen, weil eine leichtere Probe ihnen beyder Unterschied könnte gewiesen haben, und nach Jacob Bernoulli auch L. Ch. Sturm deswegen in seinen Schriften Erinnerungen gethan hat.

III. Gewichte pflegt man in Gestalt abgekürzter Pyramiden zu machen. Soll also die Form für sie

so

Digitized by Google

so groß seyn daß sie wenigstens ohngefähr soviel von der Materie des Gewichts, Messing z. E. fasst, als erfodert wird, so muß man wissen, wieviel z. E. ein Cubikzoll Messing wiegt, und wie Gestalt und Abmessungen einer abgekürzten Pyramide beschaffen seyn müssen, die soviel Cubikzoll hält, als ein Loth, oder ein Pfund u. s. w. wiegen. Plantin hat dieses gelehrt Abhandl. der königl. schwed. Akad. der Wissensch. für 1772; 364. S. meiner Uebersetzung und ich habe dabey bequemere Vorschriften gegeben, die sich auf hiesigen 4. u. 5. Zus. gründen. In den deutschen Schriften der Götting. Soc. der Wissensch. I. (und bisher einziger) Band Gött. 1771. habe ich 142. S. nach eben den Formeln ein ägyptisches Kornmaaß aus Hr. Niebuhr Abmessungen berechnet.

IIII. Einsatzgewichte sind gewöhnlich abgekürzte Kegel, in denen ein abgekürzter Kegel ausgehöhlt ist wo also diese Rechnung zweymahl muß angebracht werden, für das Ausgehöhlte, und für das Dichte.

V. Maasse für flüssige Sachen, und für Körner, sind gewöhnlich Prismen oder abgekürzte Pyramiden, Cylinder und abgekürzte Kegel mit darunter begriffen. Hie kommen also dergleichen Rechnungen häufig vor. Es entstehen dabey selbst allerley Fragen, z. E. wenn bey einem solchen vorgegebenen Maasse nicht alle Durchmesser gleich sind, wie man es doch ohne allzugrossen Fehler ausrechnet? Habe ich im hannöverischen Magazine 1772; 103. St. untersucht und im 88. St. 1775; wie man Getreidemaasse von gegebener Verhältniß zu einem gegebenen macht. Eine Aufgabe die ich im 8. St. 1774. aufgelöst habe: Ein Maaß von gegebenem Innhalte zu machen dessen Grundfläche und krumme Fläche zusammen die kleinste mögliche Gröfse haben, also am wenigsten Materie erfodern, zeigt einen ökonomischen Nutzen der Rechnung des Unendlichen. Hrn. Franz Huberti Vergleichung der hochf. Wirzburgischen und mehreren andern fremdher-

Digitized by Google

herrischen Fruchtmaasse gegen das Wirzburgische Stadtmaaß 1777; ist eine lehrreiche Probe, wie so was mit mathematischer Richtigkeit zu bewerkstelligen ist.

2. Anm. Ausrechnung von Baumstämmen.

I. Dieses lässt sich meist auf Cylinder oder Prismen bringen, und hätte also dem 4. Zus. können beygefügt werden. Theils aber wollte ich den dortigen Vortrag nicht durch ein so langes Einschiebsel unterbrechen, theils wird doch auch zuweilen der Baum als ein abgekürzter Kegel betrachtet.

II. Man kann von einem Baume, auch sonst von einer runden Säule oft den Umfang bequemer messen als den Durchmesser. Diesen berechnet man aus jenem (44. S. 5. Z.). Aber auch ohne ihn zu berechnen, weiß man die Fläche des Kreises, (eben das.) die man bequem durch Logarithmen berechnet.

III. Es sey also bey einem senkrechten Cylinder, der Umfang seines Querschnittes = p; Durchmesser = d, Querschnitt = A, Länge oder Höhe = h; Innhalt = C, so ist log d = log p — log P; log A = log p — 4 log P; log C = log h + 2 log p — log (4. P) wo der beständige Logarithme — log (4. P) = + 0, 9007901 — 2. Dergleichen Vorschriften habe ich im Neuen Hamburgischen Magazine 4. Band II. Seite gegeben.

IV. Exempel. Umfang = 17, 6 Fuß = p; Höhe 40 Fuß = h; so ist, zur Einheit den Fuß genommen

log	17, 6	=	1, 2455127
log	(1: P)	=	0, 5028501 — 1
log	d	=	0, 7483628
2 log	17, 6	=	2, 4910254
log	(1: 4P)	=	0, 9007901 — 2
log	A	=	1, 3918155
log	40	=	1, 6020600
log	C	=	2, 9938755

Durch-

Digitized by Google

Durchmesser = 5, 6022 Fuß
Querschnitt = 24, 649 Quadratfuß
Innhalt = 985, 99 Cubikfuß.

V. Die Höhe wird doch immer Fuß betragen. Hat man also den Umfang in Zollen gemessen deren zwölf auf den Fuß gehn, so muß man die Höhe in eben solchen Zollen ausdrucken: der Innhalt findet sich in Cubikzollen, hat man also seinen Logarithmen, so muß man davon log 1728 abziehen, um den Logarithmen des Innhalts in Cubikfussen zu haben. Giebt es da Decimaltheile von Cubikfussen, so verwandelt man solche durch Multiplication mit 1728 in Cubikzoll.

VI. Im Exempel wären 0, 6 Fuß = 7, 2 zwölftheilichte Zoll. Der Umfang = 211, 2 solche Zoll die Höhe = 12. 40 = 480 solche Zoll

2. log 2112 = 4, 6493878
0, 9007901 — 2

log A = 3, 5501779
log 480 = 2, 6812412

log C = 6, 2314191 in Cubikz.
log 1728 = 3, 2375437

log C = 2, 9938754 in Cubikf.

wie vorhin. Also der Innhalt 985, 99 Cubikf. Nun

log 0, 99 = 0, 9956352 — 1
3, 2375437

3, 2331789

giebt 0, 99 Cubikfuß = 1710, 7 Cubikzoll.

VII. Ein Quadrat im Kreise beschrieben hat zur Seite $k = d$; $\sqrt{2} = p$: $P\sqrt{2}$

Es ist aber $\frac{1}{2}$ log 2 = 0, 1505150
log P = 0, 4971499

Summe = 0, 6476649

Also log k = log p — 0, 6476649
= log p + 0, 3523351 — 1

VIII.

VIII. Das dient wenn man aus einem Cylinder dessen Umfang bekannt ist einen Balken hauen wollte dessen Querschnitt ein Quadrat ist. Das Quadrat selbst verhält sich zum Kreise = 2: P.

IX. Bey den Zahlen (IV)

log p = 1,2455127
0,3523351 — 1

log k = 0,5978478
2 log k = 1,1956956

Giebt des Quadrats Seite = 3,9613 Fuß und seine Fläche = 15,692 Quadratfuß. Ein Balken 40 Fuß lang dessen Querschnitt das Quadrat wäre hielte 627,68 Cubikfuß.

X. Diese Rechnungen gäben den Innhalt des Stamms von einem Baume, und dem Balken daraus, wenn der Baum durchaus gleich dick wäre. Da dieses nicht ist so würde man für den Innhalt etwa einen Umfang in der Mitte messen, da das Dickere unten, das Dünnere oben ergänzen könnte. Für den Balken, wenn er vollkommen bleiben sollte, müsste man freylich den kleinsten Umfang messen.

XI. Gründliche und erleichterte Anweisung zu der Meßkunst der Höhe und Dicke des stehend und liegenden Holzes . . . Frankf. 1758 besteht grösstentheils aus 133 Tafeln, deren jede zur Ueberschrift einen Umkreis hat, dessen Durchmesser und die Seite des Quadrats angiebt, und ferner für Längen von 1; bis 10, ferner 20; 30; 40; Schuh, den cubischen Innhalt, des runden Stamms und des gevierten Balkens. Für Umfang = 17,6 ist da angegeben Durchmesser = 5,6 Seite = 4,0 Innhalt des Stamms = 985,600 des Balkens = 600,640. Der Unterschied zwischen diesen Zahlen und IV; X rührt begreiflich daher, daß in den Tafeln nicht mit so grosser Schärfe ist gerechnet worden.

XII. Als einen Kegel den Stamm von Nadelholz auszurechnen, befiehlt Oettelt: Praktischer Beweis daß

daß die Matheſis beym Forſtweſen unentbehrliche Dienſte thue (1765) 105. §. Vielleicht kömmt dieſer Geſtalt Nadelholz näher als Laubholz. Indeſſen erinnert Vierenkle dagegen, daß man doch den Baum nicht bis ganz an den Schoppen zu Nutz- oder Klafterholz brauche: Anfangsgr. der Arithm. und Geom. in ſo fern ſolche denjenigen die ſich dem Forſtweſen widmen wollen nöthig ſind (Leipz. 1767.) 445. S. Er ſelbſt nimmt das arithmetiſche Mittel zwiſchen oberſten und unterſten Durchmeſſer, und berechnet den Stamm als einen Cylinder der dieſes Mittel zum Durchmeſſer hätte.

XIII. Beherzigungen für diejenigen welche ſich dem Forſthaushalte als Vorgeſetzte zu widmen denken (vom Hrn. p. Voigts, Lemgo 1782.) betrachten den Baum als einen abgekürzten Kegel von dem (in meiner 125. Fig.) oberer und unterer Durchmeſſer PT, BD; und Höhe CZ gegeben ſind. Man kann alſo das Trapezium BCEP zeichnen, und BP, CE, verlängern bis ſie zuſammenſtoſſen, ſo hat man AC des ganzen Kegels und AE des fehlenden Stücks Höhe. Nun giebt das Buch 145 Tafeln, in denen man den Innhalt des ganzen Kegels, und des fehlenden Stücks aufſucht, ſolchergeſtalt durch Abzug des letztern vom erſtern des Stammes Innhalt findet.

XIV. Das Verfahren iſt geometriſch richtig, und die Verhältniß 22 : 7 hat vermuthlich für ſo kleine Kreiſe als hie vorkommen zulänglich geſchienen. Die Formel des 5. §. würde Tafeln für die abgekürzten Kegel geben, ohne daß man erſt nöthig hätte den ganzen Kegel, und das fehlende Stück aufzuſuchen.

XV. Es ſey der obere Durchmeſſer = 2 Fuß = 2r; der untere = 3 Fuß = 2R die Höhe 15 = y; Alſo $RR + Rr + rr = \frac{9+6+4}{4} = \frac{19}{4}$; und das Kegelſtück = $\frac{15}{3} \cdot \frac{19}{4} \cdot P = \frac{95}{4} \cdot P = 23, 75. P.$

log

log 23, 75 = 1, 3756636
log P = 0, 4971499

1, 8728135

Innhalt = 74, 612.

XVI. Die Tafeln sind so eingerichtet daß Peripherien von 3, 2 Fuß bis 17, 6 durch Zehntheile des Fusses (Decimalzoll) wachsend angenommen sind. Für jede ist ihr Durchmesser berechnet, und nun Kegel die diese Grundfläche haben, von 4 bis 120 Fuß Länge (eigentlich Höhe).

Sind also unmittelbar nicht Umkreise sondern Durchmesser gegeben, so müsste man in den Tafeln aufsuchen, wo etwa da berechnete Durchmesser den gegebenen am nächsten kämen.

XVII. Das Exempel, müsste man nach den Tafeln so behandeln:

In meiner 125. Fig. wäre BO : OP = PZ : ZA

also hie $\frac{1.15}{0,5}$ = 30 = ZA; daher CA = 45;

Nun ist in der 63. Tafel der Durchmesser = 2 F. 9 Z. 9 $\frac{1}{11}$ L. der also 3 F. am nächsten kömmt; In der 22 Tafel der Durchmesser = 2 F. 0 Z. $\frac{8}{11}$ L. am nächsten bey 2 F. Nun geben die beyden Tafeln

63 T;	45 Fuß	Innhalt =	105, 429 $\frac{6}{11}$
22	30		31, 571 $\frac{5}{11}$
Das Kegelstück			73, 858

XVIII. Der Unterschied dieser Rechnung von XV kann zum Theil daher rühren, daß die Durchmesser nicht genau einerley sind; mehr Schuld aber gebe ich der Verhältniß 22 : 7 die Rechnungen so weit zu treiben, nicht scharf genug ist. Uebrigens dächte ich die Rechnung (XV) wäre noch bequemer und kürzer als die (XVII) da sie nicht einmahl die Höhe des ganzen Kegels zu berechnen nöthig hat.

XVIIII. Wollte man beym abgekürzten Kegel statt der Durchmesser 2R, 2r; die Umkreise C = 2R. P; c =

Digitized by Google

$c = 2r. P$; brauchen, (wie in den Tafeln unmittelbar die Umkreise gegeben sind), so hätte man nach dem 5. Zus. des abgekürzten Kegels Innhalt $= \frac{1}{3} y. \frac{C^2 + Cc + c^2}{4. P}$.

Man müßte doch aber immer die Durchmesser berechnet haben, aus ihnen und der Länge BP die man lusen am Stamme messen kann, die Höhe PO zu berechnen.

XX. M. C. L. Krüger von Ausrechnung des Innhalts roher u. behauener Baumstämme, (Berl. 1780.) erklärt die gemeine Rechnung, die sie als abgekürzte Kegel und Pyramiden betrachtet für sehr mühsam und weitläuftig zumahl wenn das fehlende Stück eine grosse Länge hat. Er zerlegt also das Kegelstück oder Pyramidenstück, in Prismen und Pyramiden, und kömmt mit Anwendung von Buchstabenrechnung auf Vorschriften wie die des 5. Z. Daß Pyramidenstücke nicht passen, wenn ein behauener Stamm sich nicht in einen Punct sondern in eine Linie endigte, erinnert er ebenfalls; aber so was wäre eine Art von Keile, ein Prisma mit dreyeckichten Grundflächen, und wenn auch an demselben etwas nach der Schärfe zu abgeschnitten wäre, so würde man immer dieses abgeschnittne Stück auch leicht berechnen. Freylich ist es gut mit Prismen und Pyramiden so bekannt zu seyn daß man andre Körper leicht in sie zerlegt.

XXI. Bey den Formeln die ich gelehrt habe, entbehrt man also leicht die angeführten Tafeln, und mehrere Hülfsmittel dieser Art; als: Abt, Anweisung zur Ausmessung und Berechnung des Bau- und Nutzholzes Berl. 1783; Tabellen worinn der Innhalt eines jeden Stammes von 6 . . 8 Zoll dick und 1 . . . 60 Schuh lang, ausgerechnet zu befinden . . . Giessen 1771. u. a. m.

XXII. Allemahl verdienen Leute Dank, die so sehr bemüht gewesen sind, ihre Einsichten nützlich an-

Digitized by Google

anzuwenden, auch enthalten ihre Bücher immer noch auser den berechneten Zahlen, viel anderes lehrreiches. Dahin gehören z. E. Vorschriften Höhen und Dicken der Bäume zu finden, in den XI; XIII; angeführten Büchern; besonders von diesem Geschäffte Reinhold Beschreibung eines Erdmikrometers, Osnabr. 1780. Ein Werkzeug zu eben der Absicht, der Hrn. Duncombe und Whittels Dendrometer, erwähnt: Deutsche Encyclopädie oder Realwörterbuch VII. Th. 91. S. Viel hieher gehöriges, enthalten auch: Beyträge zur Forstwissenschaft aus der praktischen Geometrie von C. W. H. Leipz. 1783. Daselbst 144. §. wird die Berechnung abgekürzter Kegel auf Kohlenmeiler angewandt.

63. Satz. Aufgabe.

Einer Pyramide 124. F. Seitenflächen auszurechnen.

Auflös. Weil es Dreyecke ABC; ACD, u. s. f. sind, so lasse man von der Spitze A auf jedes Grundlinie wie BC; CD; Perpendikel wie AP, AQ so ist des einen Innhalt $= \frac{AP.BC}{2}$ und so berechnet man jedes Dreyeck einzeln, und bringet sie in eine Summe.

1. Zus. Wenn alle Perpendikel AP, AQ, u. s. w. gleich sind, und jedes $= k$ gesetzt wird, der Umfang der Grundfläche aber oder $BC + CD + DE$ u. s. w. $= p$ ist, so betragen die Seitenflächen der Pyramiden zusammen $\frac{1}{2} k p$.

2. Zus. Dieses geschiehet, wenn alle Seitenflächen gegen die Grundfläche gleichviel ge-

Digitized by Google

neigt sind. Denn AR sey auf die Grundfläche senkrecht; so sind APR, AQR, der Seitenflächen ABC, ACD, Neigungswinkel (46. S. 6. B.). Sind sie also gleich, so sind auch die Winkel QAR; PAR, und daher wegen der gemeinschaftlichen Seite AR, die Dreyecke PAR; QAR gleich (3. S.).

3. Zus. In diesem Falle sind R der Mittelpunct und RP der Halbmesser eines Kreises der alle Seiten der Grundfläche berühret. Werden also diese Seiten unendlich klein angenommen, so fallen sie in den Umfang dieses Kreises (19. S. 4. B.) und die Pyramide wird ein senkrechter Kegel (141. F.) dessen krumme Fläche also $= \frac{kdP}{2}$ (63. S. 3. B.) wird, wo $k = \sqrt{(ff + \frac{1}{4}dd)}$. Die Grundfläche wird besonders aus 44. S. berechnet.

Anm. Des ungleichseitigen Kegels (61. S. 4. B.) Fläche ist nicht so leicht zu finden. Man sehe davon Hrn. Eulers Abhandlung Comm. Nov. Petrop. T. I. p. 4.

4. Zus. In einem senkrechten Kegel 125. F. sey der Grundfläche Halbmesser $CB = R$, des Queerschnittes $PZ = r$; die Verhältniß des Durchmessers zum Umkreise $= 1 : \pi$; die Seite $AP = x$, $PB = e$ so ist die Fläche des Kegels $APT = r\pi x$; $ABD = R.\pi.(x + e)$ ferner ist $BO : BP = PZ : AP$ (63. S. 4. 5. Zus.) oder

Digitized by Google

oder $R-r : e = r : x$ also $x = \frac{re}{R-r}$ und eben so $BO : BP = BC : BA$ oder $R-r : e = R : x+e$ oder $x+e = \frac{Re}{R-r}$ also die Fläche der Kegel $APT = \frac{\pi . r^2 e}{R-r}$; $ABC = \frac{\pi . R^2 e}{R-r}$, und beyder Unterschied oder die Fläche des abgekürzten Kegels $= \frac{\pi e . (R^2 - r^2)}{R-r} = \pi e . (R+r)$ (Arithm. II. 5, III. Ex.). Ist nun e unendlich klein, so ist $R-r$ ebenfalls unendlich klein, weil $R-r = \frac{re}{x}$; und man kann also setzen $R = r$ und das unendliche schmahle Stück der Kegelfläche ist $= 2\pi e R$.

64. Satz. Aufgabe.

Die Fläche einer Kugel zu finden 126. F.

Aufl. DEI sey der Halbkreis, aus dessen Herumdrehung die Kugel entstehet, K der Mittelpunct, D, I, mögen der obere und untere Pol der Kugel heissen; DI die Axe der Kugel, E sey ein willkührlicher Punct im beschreibenden Kreise, der, in dem sich DEI herumdrehet, bis es wieder in die vorige Ebene in DMI kömmt, den halben Kreis EM beschreibet; man begreift leichte, wie bey fernerer Herumdrehung dieser hal-

halbe Kreis auf der andern Seite von M bis wieder nach E ergänzet wird. Dem Punkte E liege ein anderer e unendlich nahe, und beschreibe eben so den halben Kreis em; so ist eE ein unendlich kleines Stück einer Tangente an E, (41. S. 5. Z.) und schneidet die Axe verlängert irgendwo in O (19. S. 5. Z.). Man lasse EQ, eq, auf die Axe senkrecht, so werden, indem die Kugel entstehet, von den Dreyecken OQE, Oqe zweene senkrechte Kegel beschrieben (59. S. 4. Z.) die einer ein Theil des andern sind. Die Fläche des obern Kegels OQE von der Fläche des ganzen Oqe weggenommen, lässt die unendlich schmahle Fläche eines abgekürzten Kegels wie 63. S. 4. Z. Es sey also, was dorten R ist, hie QE = y, und das dortige e bedeute hie den unendlich kleinen Bogen Ee so ist diese Fläche $= 2\pi ey$; als das unendlich kleine Stück der Kugelfläche das zwischen den unendlich nahen parallelen Kreisen EME und eme enthalten ist.

Nun ziehe man EF auf eq senkrecht, also mit KQ parallel, so ist KEe = Rect (41. S. 5. Zus.) also QEK + KEF = KEF + FEe oder QEK = FEe und $\Delta QEK \backsim \Delta FEe$ also QE: EK = FE: Ee d. i. y: r = FE: e; oder $e = \frac{r.FE}{y}$. Das Stück der Kugelfläche ist also $= 2\pi . \frac{r.FE}{y} . y = 2\pi . r. FE$. Weil nun

FE

FE = Qq so stelle man sich die Länge Dq in unzählich viel kleine Theilchen; jedes = Qq getheilet vor; jedem solchen Theilchen wird auf der Kugelfläche ein unendlich schmahles Stücke zugehören, wie hie zwischen EME und eme fällt, und alle diese unendlich schmahle Stückchen der Kugelfläche werden gleich seyn, weil jedes $2\pi.r.$ FE ist, und $2\pi.r$ für alle einerley bleibt, auch FE für alle gleich groß angenommen wird; Sie werden also zusammen soviel betragen, als die Summe aller Producte aus $2\pi.r$ in FE; d. i. als das Product aus $2\pi.r$ in die Summe aller FE oder Qq beträgt. Die Summe aller Qq aber ist Dq oder DQ weil ein Qq mehr oder weniger in Vergleichung mit DQ für nichts geachtet wird. Also ist die Summe aller $2\pi.r.$ FE $= 2\pi r$ DQ; dieses Product also ist die Summe aller der unendlich schmahlen Stückchen der Kugelfläche, die durch alle Qq in welche man DQ theilen kann, bestimmt werden; Aber diese unendlich schmahlen Stückchen, machen zusammen das Stück Kugelfläche aus das zwischen dem Pole D und dem Kreise eme oder EME enthalten ist: dieses also ist $= 2\pi r.$ DQ wo DQ $= r -$ KQ $= r - \sqrt{(r^2 - y^2)}$ und also gegeben ist, wenn der Punct E gegeben ist.

1. Zus. Für die halbe Kugel wird der Bogen DE = DG = DN $= 90^0$ und Q fällt in K oder es wird DQ = DK $= r$; Ihre Fläche ist

Digitized by Google

also $2\pi r^2$ und folglich die Fläche der ganzen Kugel $= 4\pi r^2$.

2. Zuſ. Der Umfang des gröſſten Kreiſes der Kugel DEGINM iſt $= 2r\pi$ und ſeine Fläche $= 2r\pi . \frac{1}{2} r = \pi r^2$; die Kugelfläche iſt alſo viermahl ſo groß.

3. Zuſ. Die krumme Fläche eines ſenkrechten Cylinders, deſſen Durchmeſſer und Höhe der Kugel Durchmeſſer gleichen, wären $2r\pi . 2r$ (60. S. 6. Z.) alſo der Kugelfläche gleich. Seine Grundflächen nähmlich nicht mitgerechnet.

4. Zuſ. Die Fläche einer andern Kugel, deren Durchmeſſer $= R$, wäre $= 4\pi . R^2$; Alſo die Verhältniß beyder Kugelflächen (1. S. 4. Z.) $= r^2 : R^2$.

5. Zuſ. Wenn man die Sehne DE ziehet, ſo iſt IED = Rect (21. S. 1. Z.) alſo IEQ + QED = QED + QDE und IEQ = QDE oder auch EIQ = DEQ alſo $\Delta EID \backsim \Delta DQE$, und $DQ : DE = DE : DI$; alſo $DQ = \frac{DEq}{DI} = \frac{DEq}{2r}$; folglich das Stück der Kugelfläche vom Pole bis an EME im Satze $= 2\pi r . \frac{DEq}{2r} = \pi . DEq$ = einem Kreiſe, deſſen Halbmeſſer DE wäre. Für die ganze Kugel fällt E in I und ihre Fläche iſt alſo einem Kreiſe gleich, deſſen Halbmeſſer = DI wäre; denn der iſt viermahl ſo groß

(44.

Digitized by Google

644. S. 1. Z.) als ein Kreis vom Halbmesser DK (2. Zus.).

Exempel. Eine Kugel, deren Durchmesser 6, 544000 Toisen wäre, würde nicht viel von der Erdkugel nach Maupertuis Ausmessungen unterschieden seyn (*). Das Quadrat dieser Zahl $= 4r^2$, giebt also mit π multiplicirt diese Kugelfläche in Quadrattoisen; oder sie wird $= \pi.42823936000000$. Wollte man sie in einzelnen Quadrattoisen genau haben, so müsste man wenigstens aus 43. S. Anm. π bis auf die Ordnung — 15 ausdrucken, die Ziser dieser Ordnung ist 3; und sie gäbe mit der höchsten Ziser in $4r^2$ multiplicirt 0, 12.

Nimmt man aber 1000 Toisen für die Einheit an, also $2r = 6544$; so giebt 42823936. 3, 141592653 die Fläche so weit, daß man um kein Quadrat dessen Seite 1000 Toisen wäre, das ist, um keine Million Quadrattoisen fehlt. Denn des ersten Factor höchste Ziser

(*) Bey den Elemens de Geographie des Hrn. v. M. befindet sich am Ende in der Sammlung: Ouvrages divers de Mr. de Maupertuis (Amst. 1744.). Imgleichen in den Oeuvres de Mr. de Maup. (Dresd. 1752.) 181. S. eine Tafel; die ich aber in der neuesten Ausgabe seiner Werke Oeuvres de Mr. de Maupertuis Lyon 1754. nicht sehe. Aus dieser Tafel kömmt das Mittel zwischen der Erdaxe und ihrem Durchmesser durch den Aequator 6544040 Toisen.

Digitized by Google

Ziffer ist von der Ordnung +7 und des andern niedrigste von der Ordnung −9 also ihr Product =10/12.

65. Satz. Aufgabe.

Den körperlichen Innhalt einer Kugel zu finden.

Aufl. In der 127. F. stelle DEG, den Quadranten DEG der 126. F. vor, und die Puncte, die mit einerley Buchstaben bezeichnet sind, bedeuten einerley. Man beschreibe über DK das Quadrat DKGB; und ziehe BK; Indem sich nun der Quadrant herumdrehet und die halbe Kugel beschreibet, so beschreibet das Quadrat einen Cylinder (53. S. 11. Z.) und das Dreyeck einen Kegel (61. S. 4. Z.) dessen Spitze unten im Mittelpuncte stehet. Cylinder und Kegel haben einerley Grundfläche, den Kreis nähmlich, den DB beschreibet; und eine Höhe DK = r. Werden nun BK, BG, von QE, qe; in H, h, und L, l, geschnitten, so ist zwischen den Kreisen, deren Halbmesser QE, qe, sind, ein Stück der Kugel enthalten; zwischen den Kreisen, deren Halbmesser QH, qh sind, ein Stück des Kegels, und zwischen denen deren Halbmesser Ql, ql, sind, ein Stück des Cylinders. Die beyden letzten kann man berechnen; liesse sich also das erste mit ihnen vergleichen, so könnte man wenigstens dieses Stück der Kugel finden.

Es

Es ist aber das Kugelstück als ein Stück eines Kegels anzusehen, dessen Grundfläche der Kreis, den qe beschreibet, und die Spitze in O 126. F. wäre (65). Dieser Kegel wird mit der Grundfläche parallel von dem Kreise, den QE beschreibet, durchschnitten; und der abgekürzte Kegel zwischen beyden Kreisen, ist das Kugelstück; Man kann ihn aber (nach 60. S. 3. Z.) als einen Cylinder ansehen, dessen Grundfläche der Kreis, den QE beschreibt, wäre, weil Qq unendlich klein, und qe unendlich wenig von QE unterschieden ist; also ist er, oder das Kugelstück $= \pi y^2$. Qq (59. S. 6. Z.). Eben das gilt von des Kegels, den DKB beschreibt, Stücke, das zwischen den Kreisen enthalten ist, die QH und qh beschreiben: Es ist nähmlich $= \pi$. QH^2. Qq weil aber DB = DK so ist DBK = DKB und weil QH, DB parallel sind, auch QHK = DBK = DKB, also QH = QK; aber $QK^2 + y^2 = KE^2 = r^2$ folglich auch $QH^2 + y^2 = r^2$; also die Summe des Kugelstücks, und des Kegelstücks $= \pi$. Qq. $(y^2 + QH^2) = \pi$. Qq. r^2 = dem Stücke des Cylinders, das zwischen den Kreisen, die QL, ql, beschreiben, enthalten ist. Jedes Qq also, das sich in DK nehmen lässt, giebt ein Kugelstücke, und ein Kegelstücke, die zusammen ein Stück des Cylinders ausmachen: wenn man also DK in unendlich viel Qq theilet, und diese Vergleichung für jeden Theil anstellt, so machen alle Kugelstücken, und alle

Ke-

Kegelstücken zusammen soviel als alle Cylinderstücken. Die ersten aber machen die halbe Kugel aus, die zweyten, den ganzen Kegel, und die dritten den ganzen Cylinder. Es sey also die halbe Kugel $= \frac{1}{2}S$; der Kegel $= k$, der Cylinder $= c$; so ist $\frac{1}{2}S + k = c$ oder $\frac{1}{2}S = c - k$; Nun ist $c = \pi r^3$; $k = \frac{1}{3}\pi r^3$ also $\frac{1}{2}S = \frac{2}{3}\pi r^3$ oder die Kugel $S = \frac{4}{3}\pi r^3$ oder wenn der Kugel Durchmesser $= d = 2r$; so ist $d^3 = 8r^3$, und

$$S = \frac{\pi d^3}{2.3}.$$

1. Zus. Man kann jedes Stück der Kugel, das von D bis an den Kreis, den QE beschreibet, enthalten ist, finden, wenn man von dem Cylinder, der den Kreis mit DB zur Grundfläche und DQ zur Höhe hat, den abgekürzten Kegel zwischen den Kreisen mit DB, QH, abziehet.

2. Zus. Einer andern Kugel Halbmesser sey $= R$ so ist ihr Innhalt $= \frac{4}{3}\pi . R^3$ welcher sich zum vorigen wie $R^3 : r^3$ verhält. Die Kugeln verhalten sich also wie die Würfel ihrer Halbmesser oder Durchmesser; (sunt in triplicata ratione diametrorum; Ar. VI. 9.).

Anm. Kugeln sind ähnliche Körper, weil sie von ähnlichen Dingen, auf ähnliche Art erzeuget werden. Und der Satz ist allgemein, daß Körper, bey denen das, wodurch sie bestimmt werden, die Grösse ausgenommen, einerley ist, oder ungleiche und ähnliche Körper sich wie die Würfel der Linien verhalten, die in ihnen auf ähnliche Art bestimmt werden. Er sagt

von

von Körpern so etwas wie des 42. S. 22. Z. von Flächen sagte. Aber sein allgemeiner Beweis ist hie zu weitläuftig. Exempel geben ähnliche Parallelepipeda (57. S. 9. Z.) Kegel oder Cylinder (53. S. 8. Z.). Aus diesem Satze zeigt Galiläus was dazu gehört wenn ein menschlicher Körper Riesengrösse haben sollte; Discorsi intorno à due nouve scienze dial. 2. p. 129. Swift läßt die Lilliputer nach eben dem Satze rechnen; Gegentheils hat die Unwissenheit dieser Verhältniß eine höchst ungereimte Berechnung der Grösse eines Riesen in Behrens Hercynia curiosa I. C. 52. S. veranlasst.

3. Z. Weil $\frac{1}{3}\pi = 1,047197551196597746154$ so kann gleich diese Zahl, von der man, nachdem es die Schärfe der Rechnung erfodert, viel oder wenig Zifern nimmt, mit r^3 oder $\frac{1}{8}d^3$ multiplicirt werden. Jedes Product gäbe den Inhalt des vierten Theils der Kugel. Wer viel Rechnungen dieser Art machen wollte, könnte sich eine Art von Einmahleins für $\frac{1}{3}\pi$ machen, nähmlich die ersten Vielfachen dieser Zahl, als $\frac{2}{3}\pi$; $\frac{4}{3}\pi$; $\frac{5}{3}\pi$ u. s. f. durch die Addition finden, da er denn $\frac{1}{3}\pi$ mit einer andern Zahl zu multipliciren, nur für jede Zifer des andern Factors das Product aus diesem Einmahleins nehmen dürfte, und nachdem er es in seine gehörige Stelle geschrieben hätte, alle zusammen addiren müsste.

Weil auch $\frac{1}{6}\pi = 0,523598775598\ldots$ so kann diese Zahl mit d^3 multiplicirt werden.

4. Zus. Weil $6.\ S = \pi d^3$ so ist $d^3 : S = 6 : \pi = 3 : \frac{1}{2}\pi = 3 : 1,57\ldots$ Diese Verhältniß

niß 300 : 157 wird insgemein die Verhältniß des Würfels vom Durchmesser der Kugel zu ihrem Innhalte genannt. Sie hat, wie in die Augen fällt, keine grosse Schärfe.

5. Zus. Wenn der Durchmesser D einer Kugel gesucht wird, deren Innhalt = n. S seyn soll, so ist 1 : $n = d^3 : D^3$ (2. Zus.) also $D = \sqrt[3]{n.d^3}$.

6. Zus. Wenn der Innhalt einer Kugel S gegeben, und ihr Durchmesser d gesucht wird; so ist $d^3 = 6\,S. \frac{1}{\pi} = 6.S.0,318\ldots$ (44. S. 5. Z.) aus welcher Zahl die Cubikwurzel gezogen den Durchmesser giebt.

Ex. Sollte die Kugel den sechsten Theil eines Cubikfusses halten, oder 6. S = 1 seyn, wo die Einheit ein Fuß ist; so wäre $d = \sqrt[3]{0,318} \ldots = 0,6827$.

7. Zus. $S = 4\pi r^2 . \frac{1}{3} r$ ist die Kugelfläche mit $\frac{1}{3}r$ multiplicirt (64. S. 1. Z.) und also dem Innhalte einer Pyramide gleich, deren Grundfläche die Kugelfläche und die Höhe der Kugel Halbmesser wäre (62. S. 2. Z.). Man kann nähmlich die Kugelfläche in unendlich kleine Theile theilen, die sich für Ebenen annehmen lassen. Diese kleinen Ebenen, werden Grundflächen unzähliger Pyramiden, die alle ihre Spitzen im Mittelpuncte, und zur Höhe den Halbmesser der Ku-

Digitized by Google

Kugel haben. Dieses Verfahren ist für die Kugel, was der 41. S. 43. für den Kreis ist.

8. Zus. Ein Cylinder und ein Kegel, die mit c und k einerley Grundfläche, aber zur Höhe der Kugel Durchmesser hätten, wären doppelt so groß als jene: Sie mögen C, K, heissen, so ist $C = 2c$; $K = 2k$; Aber $S = 4k \overset{\text{III}}{=} 2K$ und $k = \frac{1}{2}c$ also $K = \frac{1}{2}C$ und $S = \frac{2}{3}C$ oder $\frac{2}{3}S = C$ folglich verhalten sich C, S, K wie $C; \frac{2}{3}C; \frac{1}{2}C$; oder wie $1; \frac{2}{3}; \frac{1}{2}$; d. i. wie 3; 2; 1; welches Archimedes erfunden hat.

Anm. I. Im bisherigen konnten nur die Körper betrachtet werden, deren Kenntniß am allergemeinsten, nothwendigsten und leichtesten ist. Allgemeine Untersuchungen über die Eigenschaften und Abtheilungen der Körper sind viel weitläuftiger und schwerer, als über die ebenen Figuren, begreiflich weil die Gränzen eines Körpers, mehrere Ebenen, oder gar krumme Flächen sind. Wie nun in den Anfangsgründen der Geometrie, keine krumme Linie als der Kreis vorkömmt, so kann man in ihnen auch keine Körper mit andern krummen Flächen betrachten, als mit solchen, die blos durch den Kreis und gerade Linien bestimmt werden, Cylinder, und Kegel. So gehören Körper mit andern krummen Flächen, eben dahin wohin andre krumme Linien gehören, in eine höhere Geometrie und werden jetzo am bequemsten durch Hülfe analytischer Rechnungen untersucht.

II. Körper in lauter Ebenen eingeschlossen, gehörten freylich in die geometrischen Anfangsgründe: Wenn man aber nur das bisher vorgetragene überdenkt, so sieht man leicht daß mehrere Untersuchungen, wenigstens in einem Lehrbuche das nicht sehr weitläuftig werden soll keinen Platz finden. Hiezu kömmt, daß man sich zum allergewöhnlichsten Gebrau-

Digitized by Google

che mit den hier erwähnten Körpern befriedigen konnte, obwohl die Kenntniß anderer auch ihren praktischen Nutzen hat. Daher hat zuerst Hr. Euler, mehrere allgemeine Eigenschaften solcher Körper gezeigt und sie nach Classen geordnet. Elementa doctrinae Solidorum. Novi Commentarii Ac. Sc. Petropolit. T. IV. ad 1752. et 1753; p. 109. und 140.

III. Die ordentlichen Körper (8. Erkl.) sind doch ziemlich umständlich betrachtet worden, Euklids Elemente endigen sich damit, und man hat wohl gesagt, das ganze Buch wäre wegen der Theorie dieser Körper geschrieben — obgleich noch niemand gesagt hat, das Pantheon zu Rom sey seines Doms wegen gebaut.

IV. Zunächst bey ihnen könnte man solche stellen, die etwa in lauter gleiche Figuren, aber nicht reguläre, oder in lauter reguläre, aber nicht von einerley Art eingeschlossen sind, alle körperliche Winkel von einerley, oder nur von zweyerley Beschaffenheit, die Ecken derselben, in einer oder in zwo Kugeln haben u. d. gl. kurz: nach bekannten Gesetzen unordentlich sind.

V. Kepler, erzählt dergleichen Körper aber ohne Beweise Harmonices Mundi (Linc. 1619.) Lib. II. Hr. Marpurg giebt Netze für sie: Anfangsgründe des Progressionalcalculs, nebst Construction der eckigten geometrischen Körper. Berl. 1774; 8; IV. B. 525. u. f. §. In mehrern alten Büchern findet man dergleichen abgebildet, wie in: Janitzer Perspectiva Corporum regularium; Nürnb. 1568. Ich habe ihre Theorie in mehrern Abhandlungen der hiesigen königl. Soc. der Wissensch. vorgelegt, davon die erste: de Corporibus polyedris data lege irregularibus Commentat. Soc. Sc. T. VI. ad 1783; 84, gedruckt ist. Eben daselbst, über die Anwendung die Hr. Haüy auf das macht was er Kerne der Krystallen nennt: de Sectionibus Solidorum, crystallorum structuram illustrantibus.

VI.

Digitized by Google

VI. Körper die nicht ganz Prismen oder Pyramiden sind zerlegt man gewöhnlich in dergleichen sie auszurechnen.

VII. Ein allgemeines Verfahren jedes auch noch so unordentlichen Körpers Innhalt vermittelst Wassers oder Sandes zu finden, gehört mehr in die Mechanik als in die Geometrie, und zu seiner Nachahmung lassen sich noch andere, z. E. durch Abwägen erfinden.

VIII. Unmittelbare Anwendungen von der Ausrechnung der Körper, finden sich sogleich bey Maassen, Gewichten, Münzen u. s. w. Den schon angeführten Schriften darüber füge ich noch folgende bey:

Eisenschmidt de ponderibus et mensuris veterum; Argentor. 1707; und 1737. Eduard Bernard de mensuris et ponderibus antiquis; ed. 2. Oxon. 1688. Barth. Beverini Syntagma de ponderib. et mensuris Ed. Io. Ge. Walch Lips. 1714. Henr. Nicander, Secr. der königl. schwed. Akad. der Wissensch. Tal om de gamla Mott, Mol och Vigter Stockh. 1777. John Smith, Stereometrie, or the art of practical gauging, Lond. 1672. H. C. The Art of Practical Measuring Lond. 1706. Tho. Everard Stereometry 1712. Diese drey eigentlich zum Gebrauche gewisser Maaßstäbe geschrieben, enthalten aber sonst viel dienliche Nachrichten.

66. Satz.

Erläuterungen über die Bedeutungen solcher Ausdrückungen, wo Producte aus Linien vorkommen.

1. Wenn a, b, c, e, f, g, h, u. s. w. gerade Linien bedeuten; so pflegt man zu sagen;

Digitized by Google

Ein Product aus ein Paar solchen Linien bedeute eine Fläche, aus dreyen einen Körper.

2. Was hiemit gemeynt ist erhellt aus 42. S. 5. Zus. 57. S. 1. Zus. Eigentlich sieht man jede solche Linie als eine Zahl an, was man Producte aus Linien nennt sind Producte aus Zahlen, und ein solches Product zeigt eine Menge von Quadraten oder Würfeln an.

3. In einer Bedeutung die sich leicht auf diese bringen lässt sagt man daß sich zwey Rechtecke deren Seiten a, b und c, e, sind wie ab: ce verhalten. Das heisst nähmlich nur soviel, ihre Verhältniß ist aus den Verhältnissen a: c und b: e zusammengesetzt (47. S. 5. Zus.). Und so die Verhältniß zweener Körper aus drey Verhältnissen (G. 57. S. 8. Zus.).

4. Man pflegt also auch den Ausdruck $\frac{ab}{c}$ als den Quotienten anzusehen den eine Fläche mit einer Linie dividirt gäbe, und weil die Fläche für ein Product aus zwo Linien angenommen wird, so heisst dieser Quotient eine Linie. Ein Beyspiel findet sich 44. S. 24. Zus.

5. Wenn man jedes Rechteck durch ein Product aus seiner Höhe in seine Grundlinie ausdruckt, so ist klar daß ein Rechteck, so groß als ab; das zur Grundlinie c hat, zur Höhe $\frac{ab}{c}$ haben muß.

6.

Digitized by Google

6. Noch auf eine andere Art aber kann man sich dieses so vorstellen: Ein Paar Linien, hat eine Verhältniß die man sich durch den Quotienten vorstellen kann, den die eine mit der andern dividirt gäbe, wenn man beyde als Zahlen betrachtet die sich auf einerley Einheit beziehen.

7. Dieser Quotient bleibt also immer einerley was man auch für ein Maaß braucht, nur bey beyden Linien eben dasselbe.

8. Er ist also eine ungenannte Zahl.

9. Also läßt sich der Ausdruck (4) so verstehen $\frac{a}{c}$. b welches offenbahr heißt die Linie b soll mit der Zahl multiplicirt werden welche anzeigt was für ein Stück von c; oder wie oft c in a enthalten ist.

10. Eben so, ist $\frac{efg}{ac} = \frac{e}{a}.\frac{f}{c}.g$ ein Product aus ein Paar Quotienten wie 7; 8; erläutert, in die Linie g; folglich eine Linie, die sich zu g verhält wie $\frac{e}{a}.\frac{f}{c}$: 1.

10. Aber $\frac{efg}{c}$ wäre $= \frac{e}{c}.fg$. Also eine Fläche deren Innhalt sich durch f. g ausdrucken liesse mit der Zahl $\frac{e}{c}$ multiplicirt.

Digitized by Google

11. Man nennt Abmessung oder Dimension eines Products, die Menge von Factoren aus denen es entsteht, die Factoren für Linien angenommen. So erfodert ein Körper ein Product von drey Abmessungen, eine Fläche, eins von zwoen, die Linie hat eine Abmessung, und eine Zahl wird angesehen als habe sie keine Abmessung, oder man sagt des Ausdrucks $\frac{ab}{ce}$ Abmessung sey $= 0$.

12. Bey dem Worte: Abmessung hat man freylich zuerst an die drey Arten der Ausdehnung gedacht. Indessen, kann nicht jeder Abmessung eine eigne Art Ausdehnung zugehören, denn es giebt gewiß keine Ausdehnungen für Producte aus vier, fünf oder mehr Linien.

13. Wenn zwey Producte einander gleich seyn sollen deren jedes eine gewisse Menge von Linien enthält, so müssen in dem einen Producte soviel Linien als in dem andern enthalten seyn.

14. Wollte man $abc = fg$ setzen, so gäbe die Division $\frac{a}{f} \cdot \frac{b}{g} \cdot c = 1$.

15. Das heisst: Die Linie c, mit einem Producte aus ein Paar Zahlen multiplicirt gäbe 1. Wenn aber 1 nicht eine Linie, nur die Einheit der Zahlen ist, so kann eine Linie ihr nicht gleich seyn; Und eine Linie ist das gewiß was linker Hand des Gleichheitszeichens steht.

16.

Digitized by Google

16. Befänden sich in einem Producte wie (14) linker Hand 2, 3, 4, u. s. w. mehr Linien als rechter Hand, so gäbe dieses Verfahren allemahl rechter Hand 1; und dieser 1 sollte, eine Fläche, ein Körper, ein Product aus mehrern Linien gleich seyn, wobey sich nie was denken liesse.

17. Nur allsdann fände eine solche Gleichheit statt, wenn man unter der 1 selbst eine Linie verstünde. Man setze h bedeute ein gewisses Maaß, z. E. einen Fuß. So ist der Ausdruck $abc = fgh$ dem Satze (14) gemäß, und aus ihm folgt $\frac{a}{f} \cdot \frac{b}{g} \cdot c = h$ welches auch deutlich ist. Setzte man nun $h = 1$; so hiesse dieses nicht was es in (15) heisst, sondern: die Linie linker Hand soll ein Fuß seyn.

18. Von der Linie, die man zur Einheit annimmt kann man sich auch das Quadrat oder den Würfel, beydes in geometrischer Bedeutung, vorstellen. So sind $abc = f$; $abc = 1$ verständlich, wenn man das was rechter Hand steht durch $f. h^2$; $1. h^3$; ausdruckt, und da gäbe die letzte dieser beyden Gleichungen, $\frac{a}{h} \cdot \frac{b}{h} \cdot \frac{c}{h} = 1$ ein Product aus drey Zahlen, der Einheit der Zahlen gleich.

19. Hieraus wird man verstehn, was z. E. $a^2 . b^1 . c = f^3$ bedeuten muß, wenn es was ver-

ständliches bedeuten soll. Man muß sich von der angenommenen linearischen Einheit h; die Potenz vorstellen, welche mit f muß multiplicirt werden, daß rechter Hand soviel Linien sind als linker. Im Exempel wäre es die fünfte, oder man muß sich rechter Hand $f^3 . h^5$ vorstellen. So bekömmt man

$$\frac{a}{f} \cdot \frac{a}{f} \cdot \frac{b}{f} \cdot \frac{b}{h} \cdot \frac{b}{h} \cdot \frac{b}{h} \cdot \frac{b}{h} \cdot c = h$$

die Linie linker Hand, der Linie rechter Hand gleich.

Oder wenn man noch einmahl mit h dividirt, hat man eine Zahl linker Hand, der Einheit der Zahlen rechter Hand gleich.

20. Eine Linie als Linie betrachtet hat eigentlich keine Potenz, Potenzen gehören nur für Zahlen. Aber Exponenten der Potenzen, zeigen Vervielfachungen der Verhältnisse an;

Also kann man bey f^3 das denken: die Verhältniß f: h werde dreymahl genommen, wenn h die Linie ist die man zum Maasse der andern braucht.

22. Ein Product aus mehr Linien, mit einem aus wenigern, dividirt, giebt zum Quotienten nie eine Zahl, sondern ein Product aus Zahlen, in eine Linie, oder in ein Product aus Linien. Z. E. $\frac{a^5 b^3}{c^2} = \left(\frac{a}{c}\right)^2 . a^3 b^3$.

23.

Digitized by Google

23. Ein Paar Grössen von einerley Art, müssen allemahl so beschaffen seyn, daß eine etliche mahl in der andern enthalten seyn kann, oder daß ihr Quotient eine Zahl ist.

24. Folglich sind die beyden Producte bce; fg; nicht Grössen von einerley Art.

25. Solchergestalt können auch zwey solche Producte nicht zusammengesetzt werden, daß sie ein Ganzes ausmachten.

26. Man kann so wenig bce + fg für ein Ganzes annehmen, als man ein Ganzes aus einem Körper und einer Fläche zusammensetzen kann.

27. Daher sagt man: Producte aus Linien die zusammengesetzt werden sollen, daß sie ein Ganzes ausmachen, müssen eines soviel Abmessungen haben, als das andere. Findet sich diese Gleichheit der Abmessungen nicht sichtbar, und die Producte sollen doch ein Ganzes zusammen ausmachen, so muß man sich eine Linie vorstellen, die als Einheit ist angenommen worden, wodurch diese Gleichheit hergestellt wird.

28. So machen bce + fgh zusammen ein Ganzes, das man als die Summe zweener Körper ansehn könnte; $\frac{bce}{h} + fg$, machten ein Ganzes das sich als die Summe von zwo Flächen ansehn liesse. Setzt man nun in so eine Bedeutung wie (17) $h = 1$; so bekömmt jede die-

dieser beyden Ausdrückungen die Gestalt wie in (26) und bedeutet freylich auch noch unter dieser Gestalt ihr voriges Ganze.

29. Diese Begriffe werden bey der Anwendung der Buchstabenrechnung und Algebra immer vorausgesetzt, ohne daß man sie eben deutlich erklärt. Hie schiene mir der eigentliche Platz zu ihrer Entwicklung zu seyn, nachdem man mit dem Verfahren, Producte aus Linien zu Ausrechnung der Flächen und Körper zu machen, und mit der Bedeutung solcher Producte zulänglich bekannt ist.

Anm. Einiges von Euklids Elementen.

I. Es ist wohl nicht überflüssig am Ende der Geometrie Nachrichten von dem ältesten Lehrbuche derselben das auf uns gekommen ist zu geben, da es deßwegen, und als vollkommenstes Vorbild eines deutlichen und überzeugenden Vortrags unter den vortrefflichsten Werken des menschlichen Verstandes eine der ansehnlichsten Stellen einnimmt.

II. Die einzelnen Bücher aus denen es besteht, betreffen drey Hauptgegenstände; 1 . . . 6, die ebene Geometrie 7 . . . 10 die Lehren von Rational und Irrationalverhältnissen 11 . . . 15; Lagen der Ebnen und Eigenschaften der Körper. Das 13 betrachtet besonders die ordentlichen Körper, ihre Beschreibung in die Kugel, und Vergleichung ihrer Seiten. Das 14 und 15; werden dem Hypsicli Alexandrino zugeschrieben, sie enthalten fernere Untersuchungen über die ordentlichen Körper.

III. Die vollkommenste Ausgabe des Grundtextes, ist: Euclidis quae supersunt omnia, ex rec. Dav. Gregorii Oxon. 1703. fol. enthält auch andere theils dem Euklid gehörige, theils ihm beygelegte Werke, mit

mit lateinischer Uebersetzung. Blos griechisch Εὐκλείδε στοιχείων βιβλ. ιε . . . nebst vier Büchern der Erklärung des Proklus über das I. B. Basel 1533. fol.

IV. Unter den lateinischen Ausgaben ist die erste gedruckte von dem augspurger Drucker Erhard Ratdold Venet. 1482. Ich habe sie in einem Briefe an den Cardinal Quirini beschrieben: Geometriae Euclidis primam quae post inventam typogr. prodiit editionem, Leipz. 1750. Es ist Campani Uebersetzung aus dem arabischen. Euclidis Elementor. Libri XV . . . auct. Christoph. Clavio sind oft herausgekommen, die dritte Ausg. Cöln 1591. fol. Clavius hat sich um den Euklid, durch grosse Deutlichkeit, und allerley beygefügte Erinnerungen sehr verdient gemacht.

V. Schlüsse die mit Worten ausgedruckt sehr weitläuftig werden, durch den Gebrauch arithmetischer Zeichen abzukürzen, ist soviel ich weiß, zuerst von Pierre Herigone öffentlich geleistet worden. Cursus Mathematicus nova brevi et clara methodo demonstratus per notas reales et universales, citra ullum cuiuscunque idiomatis intellectu faciles. Par. 1634. ich besitze auch ein Exemplar, das mir nur einen andern Titel mit 1644 zu haben scheint. Dieser erste Band von H. Cursus enthält vornähmlich die XIV. Bücher der Elemente, die Sätze lateinisch und französisch, Beweise und Auflösungen, durch Zeichen ausgedruckt theils arithmetische, theils andere z. E. Kreis durch ⊙, Abkürzungen v. Kunstwörtern u. d. gl. Wer diese Zeichen fertig liest, übersieht allerdings die Sache geschwind. Erklärt muß man sie ihm aber doch zuvor in irgend einer Sprache haben, und so möchte H. Werk doch nicht ohne alle Sprache verständlich seyn. Es ist damit ohngefähr: Wie alle europäische Nationen eine Zahl mit morgenländischen Ziffern ausgedruckt lesen.

Digitized by Google

VI. Euclidis Elementor. Libri XV. breviter demonstrati opera Is. Barrow Cantabr. 1675; Ich habe auch einen Nachdruck Osnabrück 1676. besessen. Durch den Gebrauch der arithmetischen Zeichen ist das Wesentliche aus Clavius Folianten in einen mässigen Duodezband gegangen. Da B. Ausgabe in Deutschland doch nicht so häufig zu haben ist, so verdient als Handausgabe G. F. Bärmanns gebraucht zu werden, eines Leipzigers der 1769. als Prof. Math. Superior. zu Wittenberg gestorben ist. Elementor. Euclidis Libri XV. Lipsi. 1743. und 1769. Daß B. ein Schüler von Ernestin war empfiehlt sie auch wegen kritischer Richtigkeit.

VII. Deutsche hat sich Hr. Joh. Friedr. Lorenz sehr verbindlich gemacht: Euklids Elemente funfzehn Bücher, aus dem Griechischen. Halle 1781. Schon 1773. hatte er die ersten sechs Bücher geliefert, zu denen man jetzo aus der vollständigen Uebersetzung das 11. und 12; besonders bekommen kann, wenn man die übrigen (11) entbehrlich hielte.

VIII. Dem ersten Anfänger zum Dienste hat man häufige Ausgaben der ersten sechs Bücher veranstaltet. Euclidis Elementor. Libri 6 . . . a Mauritio Steinmetz Lipsi. 1577; die Sätze griechisch und lateinisch, bey den ersten drey Büchern die Beweise lateinisch, bey den übrigen keine Beweise. In Ermangelung eines vollständigern Grundtextes, lernt man daraus wenigstens die griechische geometrische Sprache. Iac. Peletarii in Euclidis Elementa Geometrica Demonstrationum Libri Sex, enthalten durchgängig die Beweise, und bey der zweyten Ausgabe ap. Ioann. Tornaesium 1610; 4° auch die Sätze griechisch. Io. Iac. Hentsch (er studirte zu Jena und Leipzig und starb als Prof. Math. zu Helmstädt) Philosophia Mathematica complectens methodum cogitandi ex Euclide restitutam conamina 2. priora; . . . complectens Scientiam rerum universalem . . . con. 2. poste-

Digitized by Google

posteriora Lipſ. 1756. die zweyte Ausgabe, enthält auch die erſten ſechs Bücher und zeigt derſelben Gebrauch in Logik und Metaphyſik.

IX. Ich habe nur einige Ausgaben Euklids erwähnen wollen, die etwa am erſten verdienen gekannt zu werden. Mehrere, ſelbſt aus meinem eigenen Vorrathe anzuführen iſt hie der Ort nicht. Eine chronologiſche Bibliographie den Euklid betreffend, liefert Hr. Prof. Scheibel in ſeiner Einleitung zur mathematiſchen Bücherkenntniß I. Stück. Fabricius Bibl. Graec. L. III. c. XIV. G. Matthias Boſe (ein Leipziger der als Prof. der Phyſik zu Wittenberg ſtarb) Schediaſma litterarium quo contenta Elem. Eucl. enunciat, ſimul de variis editionibus poſt Fabricium diſſerit Lipſ. 1737.

X. Die geometriſche Analyſis der Alten, erforderte daß man gegenwärtig hatte, was aus unmittelbar bekannten Dingen ſogleich durch nahe Folge gegeben iſt; z. E. wenn ein paar gerade Linien die einander ſchneiden, der Lage nach gegeben ſind, daß auch ihr Durchſchnittspunct gegeben iſt. Ευκλειδε Δεδομενα, . . . Euclidis Data . . . Par. 1625; 4°; enthalten eine Sammlung ſolcher Sätze. In dieſer Ausgabe erſcheinen ſie zum erſtenmahle griechiſch aus des Königs in Frankr. Bibliothek; Claudius Hardy Sebaſt. fil. in ſuprema Pariſienſi curia advocatus, hat ſie ſo herausgegeben, latein. Ueberſ. und Anmerkungen beygefügt. Sonſt hatte man ſie ſchon in Ueberſetzungen. Beym Herigon (V) finden ſich: Les *Dates* d' Euclide. D. Henrion, Les quinze livres des elemens géométriques d' Euclide, traduits et commentez Rouen und Par. 1677, giebt den Titel franzöſiſcher: les *Donnez* d' Eucl. Euklids Data (Hie muß das Wort freylich behalten werden, denn: Gegebene verſtünde doch kein Deutſcher.) verbeſſert und vermehrt von Robert Simſon, aus dem engliſchen überſetzt und mit einer Sammlung geometriſcher

scher nach der analytischen Methode der Alten aufgelöster Probleme begleitet von Joh. Christoph Schwab Stuttg. 1780. ist Deutschen die sich in der Analysis der Alten üben wollen sehr nützlich. Simson und folglich auch Hr. Schw. hat des platonischen Philosophen Marini ὑπομνημα weggelassen. Dieser Aufsatz ist ganz logisch, und zeigt wie überhaupt aus angenommenen Dingen andere bestimmt werden. Davon sagt M. habe Euklid nur die Anwendungen auf Gröſſen gemacht, die er als Geometer nöthig hatte. Marins Aufsatz verdient also immer gekannt zu werden.

XI. Allgemeine geometrische Bibliographie findet hie noch weniger Platz, als euklidische. Ueber die unzählichen geometrischen Lehrbücher, kann ich nur sagen, daß, von dem eignen Werthe der Geometrie, Deutlichkeit, und Gewißheit, jedes desto weniger besitzt, je weiter es sich von Euklids Elementen entfernt.

Die ebene Trigonometrie.

1. Erklärung.

Die ebene Trigonometrie lehrt aus soviel gegebenen Seiten und Winkeln als ein Dreyeck bestimmen; wenn solche in Zahlen gegeben sind, die unbekannten Seiten oder Winkel bey diesem Dreyecke durch Rechnung zu finden.

Zus. Unter den gegebenen muß wenigstens eine Seite seyn. Die Winkel allein bestimmen unzählige ähnliche Dreyecke: (speciem trianguli)

Digitized by Google

li) (G. 26. S.). Auch können von einem Dreyecke, nicht drey Winkel gegeben seyn, denn durch zweene, ist schon der dritte bestimmt. Die drey gegebenen Dinge bey einem Dreyecke, müssen einander nicht bestimmen, so daß man jedes von ihnen ändern kann ohne eines der übrigen zu ändern.

2. Erklärung.

Nach den beyden Endpuncten eines Bogens A, D, sind Halbmesser aus C gezogen, (1. F.) auf den einen Halbmesser CA falle ein Perpendikel DE von dem andern Endpuncte; Dieses heisst des Bogens AD Sinus.

1. Zus. Wenn man es verlängert, bis es den Kreis wieder in F schneidet; so ist EF = DE, (Geomet. 17. S.) und die Bogen DA = AF (G. 22. S. 2. Z.). Der Sinus eines Bogens ist also die halbe Sehne des doppelten Bogens.

Exempel. Wenn der Bogen DAF = 60° also die Sehne DF = CD (G. 23. S. 5. Z.) und DE sin DA = sin 30° oder der Sinus von 30 Graden ist die Hälfte des Halbmessers. Ist DAF = 90 Gr. so ist DF = $\sqrt{2}$CD quad (G. 15. S.) also DE = sin 45 Gr. = $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. CD quadr. = CD. 0,7071068; weil $\sqrt{2}$ = 1, 4142136.

2. Zus. Des Bogens DHB der über 90° ist Sinus ist auch DE; und zweene Bogen, die zusammen 180 Gr. ausmachen, haben völlig einer-

Digitized by Google

nerley Sinus. Nähme man den Bogen ADHf = BHD = 180° — AD, so würde Bf = AD; und das Perpendikel fe wäre der Bogen Af. Bf Sinus, und weil ACD = BCf (G. 22. S.) so ist fe = DE und Ce = CE (G. 3. S.). Wenn AH = 90°; so ist hie Hf = HD oder AD beträgt soviel unter 90° als Af darüber; Bogen also, die sich auf beyden Seiten des Quadrantens gleichviel von ihm unterscheiden, haben einerley Sinus.

3. Zus. Wenn der Bogen AD bis 90 Gr. wächst, so rückt D nach H, und so F nach h, also die Sehne DF nach dem Halbmesser Hh zu, und wächst (G. 18. S.). Die Sinus von Bogen unter 90 Gr. wachsen also mit ihren Bogen (1. Zus.) bis für AG = 90 Gr. der Sinus HC dem Halbmesser gleich wird. Für Af > 90 Gr. nehme man Ad = Af, so nimmt die Sehne fd immer ab, je grösser Af = Ad wird; die Sinus der Bogen über 90 Gr. nehmen also ab, indem ihre Bogen zunehmen; bis für AHB = AhB = 180 Gr. Sehne und Sinus = 0 werden. Eben dieses erhellt aus Betrachtung der Dreyecke DCH, fCe, wie auch aus 2. Zus.

4. Zus. Wenn DC verlängert den Umkreis in d schneidet, so ist de des Bogens AHBd Sinus; Ein Bogen über 180° hat also einen Sinus, welcher so groß ist als der Sinus des Bogens unter 180 Gr. um welchen jener Bogen 180 Gr. übertrifft; Nähmlich Bd = AD.

Eben

Eben dieß gilt für den Bogen ABhF der über 3. 90 oder 270 Gr. ist; und FE = fe = DE = sin BHD zum Sinus hat, wie BhF sein Ueberschuß über 180 Gr. = BHD ist.

5. Zus. Die Sinus aller Bogen unter 360° sind also kleiner als der Halbmesser; den Sinus HC von 90 Gr. und den hC von 270 Gr. ausgenommen; Sie wachsen von 0 bis 90 Gr; nehmen von 90 bis 180 Gr. wieder ab, wo sie = 0 werden, wachsen wieder von 180° bis 270° und nehmen von 270° bis auf Nichts in 360° ab.

6. Zus. Man kann sie also alle als eigentliche Brüche des Halbmessers ansetzen; den man daher sinum totum nennt.

Anm. Wenn zu einem Bogen der ganze Umkreis ein- oder etlichemahl addirt wird, so kömmt ein Bogen über 360 Gr. heraus wie ADBFAD; Es erhellt, daß diese Bogen Sinus von eben der Grösse haben, wie die bisher beschriebenen.

7. Zus. Weil die Sinus zwischen 180 und 360 Gr. auf die entgegengesetzte Seite der Durchmessers AB fallen, so sind sie verneinend (Ar. I. 90.). Eben das erhellt aus der Art, wie sie nach dem 5. Zus. entstehen. Die Verschwindung ist ein Uebergang in das Entgegengesetzte (G. 12. S. 14. Z.). Es sey der Halbmesser oder Sinus totus = r; AD = 30° = Bd = AF; also AHBd = 180° + 30° = 210° und AHBhF = 360° − 30° = 330; so sind DE = sin

$= \sin 30^\circ = \frac{1}{2} r$; de = FE oder $\sin 210^\circ = \sin 330^\circ = -\frac{1}{2} r$.

Das Entgegengesetzte in den beyden Sinussen DE de, kömmt auf ihre Richtungen an, die entgegengesetzt sind, man mag auf jedem von dem Puncte, wo er in AB schneidet, nach dem, wo er in seinen Bogen trifft, oder von diesem nach jenem gehen. Aber diese Richtungen sind bey DE fe, nicht entgegengesetzt, daher haben diese Sinus einerley Zeichen.

8. Zus. Wenn man AH; HB; Bh; hA; den ersten, zweyten, dritten, vierten Quadranten nennt, so sind die Sinus in den ersten beyden bejahend; in den letzten beyden verneinend.

3. Erklärung.

DH (2. Zus.) heisst des Bogens AD Ergänzung (complementum); nähmlich zu 90 Gr. und DK = sin DH; des Bogens AD Cosinus (sinus complementi).

1. Zus. Weil DK = CE; so ist das Quadrat des Cosinus = r^2 — dem Quadrate des Sinus; daß also der Cosinus gegeben ist, wenn man den Sinus hat. Imgleichen auch AE der Unterschied zwischen dem Halbmesser und Cosinus; welcher der Quersinus (sinus versus; sagitta,) heisst.

Er-

Ex. Cosin 30° oder sin 60° $= \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} r^2)} = \sqrt{\frac{3}{4} r^2} = \frac{\sqrt{3}\, r^2}{\sqrt{4}}$ (Arithm. I. 77.) $= \frac{r\sqrt{3}}{2}$.

2. Zus. Cos Af = Ce = − CE (Ar. I. 90.) oder der Cosinus eines Bogens zwischen 90 und 180 Gr. ist dem Cosinus des Bogens, welcher demselben zu 180 Gr. fehlt, gleich, aber negativ.

3. Zus. Die Cosinus der Bogen unter 90 Gr. nehmen ab, indem ihre Bogen wachsen; verschwinden in C wo Cos 90° = 0; und kommen für die Bogen über 90° wieder negativ zum Vorscheine, da sie mit den Bogen zugleich wachsen bis auf 180° wo der Cosinus = − Cos 0 = −r; Ueber 180° bleiben sie noch verneinend und nehmen ab; bis Cos 270° = 0 und von dar werden sie wieder bejahend und wachsen, bis Cos 360° = + r. Also sind die Cosinus im ersten und vierten Quadranten bejahend; in den mittlern beyden verneinend.

4. Zus. Wenn die Bogen AF = AD; so kann man jenen als bejaht, diesen als verneint ansehn. Im Kreise nähmlich, kann man von einem gegebenen Puncte nicht anders nach entgegengesetzten Seiten gehen, als wenn man das einemahl nach diesem Bogen, das anderemahl nach dem andern geht.

Digitized by Google

Diesem Bogen gehören als Sinus ED; EF, gleiche aber entgegengesetzte Linien.

Folglich ist für einen Bogen unter 90 Grad der Sinus bejaht oder verneint, nachdem der Bogen bejaht oder verneint ist.

Beyde Bogen haben aber völlig eben denselben Cosinus CE.

Also ist für einen verneinten Bogen unter 90 Grad, der Cosinus so wohl bejaht, als für den bejahten.

Nimmt man zweene entgegengesetzte Bogen zwischen 90 Gr. und 180 Gr. wie AHf; Ahd; so hat wiederum der bejahte einen bejahten Sinus, der verneinte einen verneinten.

Beyde haben einerley verneinten Cosinus Ce.

Ueberhaupt ist eines verneinten Bogens Cosinus, allemahl völlig einerley mit des bejahten seinem; bejaht oder verneint, nachdem jener bejaht oder verneint ist. Dieses erinnere ich hie nur ohne Beweis. Bey den ersten Anwendungen der Trigonometrie, braucht man es nicht, und wenn man es braucht, wird man sich den Beweis dazu leicht machen, auch bald finden wie es sich mit den Sinussen ferner verhält.

4. Erklärung.

Die berührende Linie an A, welche von der verlängerten CD in G abgeschnitten wird, oder AG, heisst des Bogens AD Tangente und CG seine Secante.

Exemp.

Digitized by Google

Exemp. Wenn AD = 45° so ist AG = CA oder Tang 45° = r und CG oder Sec 45° = $\sqrt{2}r^2$.

1. Zus. Des Bogens ADf Tangente ist Ag = — AG unter den angenommenen Grössen dieser Bogen (1. Erkl. 2. Zus.); des Bogens ADfd Tangente ist AG selbst wieder; und des Bogens ADfdF Tangente Ag = — AG; oder die Tangenten sind im ersten und dritten Quadranten bejahend; im zweyten und vierten verneinend.

2. Zus. Wenn D nach H zu rückt, so geht G immer weiter von A bis ins unendliche, wenn D in H fällt (G. 12. S. 12. Z.). Die Tangenten wachsen also im ersten Quadranten mit ihren Bogen und es ist Tang 90° = ∞ (welches Zeichen das Unendliche bedeutet); Im zweyten nehmen die negativen Tangenten ab, indem die Bogen wachsen; bis Tang 180° = 0. Im dritten wachsen wieder bejahende Tangenten mit ihren Bogen bis Tang 270° = ∞ und im vierten nehmen verneinende Tangenten bis auf Tang 360° = 0 ab. Alles dieses hängt mit G. 12. S. 14. Z. zusammen.

3. Zus. Es heisse der Kürze wegen der Bogen AD = x; Weil CE: ED = CA: AG so ist Cos x: sin x = r: tang x; oder tang x = $\frac{r.\ \sin x}{\cos x}$.

Digitized by Google

4. Zuſ. Auch hieraus mit 3. Erkl. 2. Zuſ. und 2. Erkl. 7. Z. und Ar. I. 90. u. f. verglichen folgt der jetzige 2. Zuſ. z. E. In H und h ſind cos x = o; alſo Tang x = ∞; Nähmlich eine endliche Gröſſe mit o dividirt giebt einen unendlichen Quotienten; das heiſſt: Indem der Diviſor abnimmt und kleiner als jede Gröſſe wird, die ſich angeben läſſt, wächſt der Quotiente, und überſteigt alle Gröſſen, die ſich angeben laſſen.

5. Zuſ. CE: CD = CA: CG oder cos x: r = r: sec x; Alſo ſind Secante und Tangente durch den Coſinus und Sinus; d. i. durch den Sinus (3. Erkl. 1. Zuſ.) gegeben. Auch iſt sec x = √ (r² + tang x quadr.).

5. Erklärung.

Der Ergänzung DH; (3. Erkl.) Tangente HK 2. Fig. heiſſt des Bogens AD Cotangente und CK die Coſecante.

1. Zuſ. Weil AGC = GCH; ſo iſt AG: CA = CH: HK; oder cot x = $\frac{r^2}{\text{tang } x}$; und ED: CD = CH: CK; oder sin x: r = r: cosec x; daß alſo auch Cotangente und Coſecante durch den Sinus gegeben ſind.

2. Zuſ. Für einen andern Winkel y; iſt cot y = $\frac{r^2}{\text{tang } y}$ alſo cot x: cot y = tang y: tang x.

3. Zuſ.

Digitized by Google

3. Zuſ. Die Cotangenten haben alſo in den verſchiedenen Quadranten einerley Zeichen mit den Tangenten.

1. Satz. Lehrſatz.

Die trigonometriſchen Linien (2. 3. 4. 5. Erkl.) verhalten ſich bey ähnlichen Bogen wie die Halbmeſſer.

Bew. Mit einem andern willkührlichen Halbmeſſer Cα 3. F. beſchreibe man innerhalb den Scheinkel des Winkels ACD den Bogen αδ welcher dem AD ähnlich ſeyn wird, und ziehe deſſen Sinus δε, Coſinus Cε; Tangente αγ, Secante Cγ; So iſt (G. 26. S.)

CD: Cδ = DE: δε = CE: Cε und
CA: Cα = AG: αγ = CG: Cγ und
CH: Cη = HK: ηκ = CK: Cκ.

1. Zuſ. Wenn man die beyden Halbmeſſer Cα, CA, in gleichviel gleiche Theile theilet, die alsdenn nur bey dem gröſſten Halbmeſſer gröſſer werden; ſo bekömmt jede dieſer Linien für den Bogen αδ eben ſoviel Theile als die gleichnahmige für den Bogen AD.

2. Zuſ. Die Verhältniß jeder dieſer Linien gegen den ihr zugehörigen Halbmeſſer, kömmt blos auf die Gröſſe des Winkels ACD an, deſſen Maaß ſo wohl der Bogen AD als der αδ iſt, wenn man beyde nur als Mengen von Graden betrachtet (G. 22. S. 6. Z.). Man kann ſie alſo als Linien betrachten, die ſich auf dieſen Win-

Digitized by Google

kel beziehen: Ihre wirklichen Grössen kommen alsdenn auf ihres Halbmessers Grösse an. Wenn nähmlich auf eines gegebenen Winkels Schenkel; CD nach Gefallen angenommen wird, so ist sein Sinus DE für diesen Halbmesser gegeben; Und so giebt sich für einen andern Halbmesser Cδ auf eben dem Schenkel ein anderer Sinus δε. So verhält es sich für beyde Halbmesser mit jeder der übrigen Linien, die alle durch die Sinus bestimmt werden (4. Erkl. 3. 5. Z. und 5. Erkl. 1. Zus.). Theilt man aber den Halbmesser, er mag groß oder klein seyn, in einerley Menge von Theilen, so wird jede dieser Linien eine Zahl solcher Theile, welche nun auf den Winkel ankömmt und für alle Halbmesser einerley ist.

Heisst jeder Halbmesser 100; so ist eines Winkels von 30 Gr. Sinus allezeit 50. d. i. wenn αCδ = 30 Gr; so hält DE; 50 solcher Theile dergleichen CA; und δε; 50 dergleichen Cα; 100 hält.

3. Zus. Bedeutet also nun x den Winkel in Graden ausgedruckt, so sind die Ausdrückungen sin x; cos x; tang x u. s. w. Zahlen, die für jeden Winkel gehören; und einen Halbmesser in eine gewisse Menge von Theilen getheilet zum voraus setzen.

4. Zus. Das bejahende und verneinende dieser Linien wechselt bey ihnen für stumpfe Winkel, und für Winkel, die über 180 Gr. betragen, so ab, wie für die Bogen, die ihre Maasse sind.

2. Satz.

Digitized by Google

2. Satz. Foderung.

Wenn dem Halbmesser eine gewisse Menge gleicher Theile gegeben wird, zu finden, wieviel solcher auf jede der vorgenannten Linien, für jeden Winkel kommen.

1. Anm. Daß die Foderung nichts unmögliches verlanget, erhellet aus 1. S. 2. Z. die Arten aber, sie zu bewerkstelligen, sind entweder zu weitläuftig, als daß sie hie Platz fänden, oder sie setzen Kunstgriffe der Algebra und der Rechnung des Unendlichen zum voraus. Jene findet man in Ioach. Rhetici und Valent. Othonis Opere Palatino de Triangulis; 1596. fol. in Stevins Cosmographie I. Th. Gellibrands Trigonometria Britannica Goud. 1633. fol. Barth. Pitiſci Trigonometria Frf. 1612. die 3. Ausg. Ozanam Tables des sinus. Wolfs El. Trigon. lat. Cap. I. Frobesii histor. et dogmatica canonis trigonometrici dilucidatio Helmst. 1750. Nach ihnen sind Tafeln berechnet worden, welche die Zahlen dieser Linien und ihre Logarithmen, für alle Grade und Minuten des Quadrantens, oder in der Trig. Brit. für alle Grade und Hundertheile von Graden enthalten. Zu den gegenwärtigen Absichten reichen diese zu; für schärfere astronomische Rechnungen werden noch Theile von Minuten verlangt. Wenn man den grossen Nutzen dieser Tafeln aus dem Gebrauche hat kennen lernen, so wird man diese Arten, sie zu berechnen, in den angeführten oder andern Schriften selbst nachlesen können; Sie beruhen blos auf Sätzen der gemeinen Geometrie, von denen aber viele in nächstvorhergehenden kurzen Anfangsgründen keinen Platz gefunden haben. Die Algebra zeigt selbst bey diesen Berechnungen Vortheile, und giebt Vorschriften, nach denen diese Tafeln viel leichter hätten können berechnet werden. Aus ihr kann man also die Möglichkeit solcher Tafeln allgemeiner übersehen, und selbst ihre

Digitized by Google

Zahlen prüfen; auch sie zu allerley weiterm Gebrauche anwenden lernen, da die Berechnung selbst von neuem vorzunehmen, weder eines Menschen Arbeit, noch von einigem Nutzen wäre.

Gemeine Ausgaben von Tafeln lernt man gleich kennen und gebrauchen, wenn man sich in folgenden Rechnungen übt. Von grössern, oder sonst in unterschiedener Absicht merkwürdigen Tafeln, habe ich in meinen astronomischen Abhandlungen II. Sammlung 4. Abhandlung Nachrichten gegeben. J. C. Schulz Samml. logarithmischer trigonometrischer und anderer Tafeln Berl. 1778. 2 Bände 8o. Ge. Vega Logarithm. trigon. und andere Tafeln Wien 1783. 8o. Tables portatives des logarithmes . . . par Mr. Callet 1783. Par.

2. Anm. In den gebräuchlichen Tafeln, hat man zu ihrer Berechnung den Halbmesser = 10 000 000 000 angenommen; daher sein Logarithme = 10 wird, und in solchen Theilen des Halbmessers sind alle Linien, die natürlichen Sinus ꝛc. und ihre Logarithmen die künstlichen Sinus ꝛc. berechnet worden. Man hat aber in den gemeinen Ausgaben dieser Tafeln von jeder solchergestalt berechneten Linie die letzten drey Zifern weggelassen, d. i. man hat sie nur für den Halbmesser 10 000 000 mitgetheilet. Die Logarithmen sind ungeändert geblieben, deren Kennzifern also für die Zahlen, neben denen sie stehen, alle zu groß sind. Das giebt in dem trigonometrischen Gebrauche keinen Fehler, wenn mit den Logarithmen allein gerechnet wird, denn da werden sie als Logarithmen der Linien, die zu gewissen Winkeln gehören, angesehen, und man bekümmert sich gar nicht darum, wie groß diese Linien selbst sind. Aber wenn man die Logarithmen als Logarithmen der neben ihnen stehenden Zahlen ansehen wollte, könnte man in Irrthum verführt werden. In der Trigon. Britann. ist der Halbmesser für die Tangenten eben so, aber für die Si-

Digitized by Google

Sinus, tausend Billionen angenommen; die Logarithmen aber sind für den zuerst erwähnten Halbmesser eingerichtet. B. Pitisci Thesaurus Mathematicus s. Canon Sinuum Frf. 1613. fol. enthält nur die Sinus von 10 zu 10 Secunden, und im ersten und letzten Grade alle Secunden, der Halbmesser tausend Billionen. Uebrigens sieht man die Linien, die vorerwähntermassen unter gewissen Umständen verneinend werden, als bejahend an, wenn von ihren Logarithmen die Rede ist, oder, diese Linien haben verneint eben die Logarithmen, die sie bejahend haben. Das verneinende bestehet blos in ihrer Lage, der Logarithme bezieht sich nur auf die Grösse, die auch bey entgegengesetzter Lage einerley bleibt. Sonst werden in der Algebra verneinter Grössen Logarithmen unmöglich.

8. Anm. Die Bequemlichkeit erfodert bey diesen Tafeln daß die Bogen unter 45. Gr. und ihre Ergänzungen zu 90. Gr. beysammen stehen. Dieses verursacht eine sonderbahre Einrichtung; nähmlich Anfang und Ende ist bey ihnen beydes vorne beysammen, und die Mitte steht auf ihren letzten Blättern.

4. Anm. Es ist falsch, daß sonst insgemein in ihnen die Logarithmen vom Sinus und von der Tangente des Bogens 0; auch 0 angegeben wurden. Denn dieses Bogens Sinus und Tangente sind nicht 1. sondern 0; für den Halbmesser der Logarithmischen Tafeln, ist des Bogens $0^{\circ}\ 0'\ 0''\ 0'''\ 0''''\ 4^{v}\ 27^{vi}\ldots$ Sinus oder Tangente $= 1$; also ihr Logarithme $= 0$. Iac. Bernoull. Op. T. II. p. 973.

5. Anm. Der einzige Sinus von 30. Gr.; und die einzige Tangente von 45. Gr. sind Rationalzahlen. Nun stehen in den gewöhnlichen Tafeln 90. 60. Sinus; Tangenten, und Logarithmen für beyde; auch für die gemeinen ersten 10000. Zahlen. Darunter zeigen die Tafeln nur völlig richtig, den Sinustotus und seinen Logarithmen, die Tangente von 45. Gr.

Digitized by Google

und ihren Logarithmen, den Sinus von 30. Gr. und die Logarithmen von 1, 10, 100, 1000, 10000: das sind 10, völlig wahre Sätze unter 31600 die übrigen 31590. sind alle nur beynahe wahr: Und auf ihnen beruhet die Ausmessung des Himmels und der Erden, und fast die ganze angewandte Mathematik. So richtig ist es, daß wir in unsern sichersten und erhabensten Kenntnissen uns der Wahrheit nur nähern, ohne sie völlig zu erreichen.

6. Anm. I. Da in den gewöhnlichen Tafeln die Bogen durch alle ganze Minuten wachsen, so geben die Rechnungen welche zunächst gelehrt werden, häufig für Sinus, Tangente, oder Logarithmen dieser Linien, etwas das nicht genau in den Tafeln steht; sondern zwischen ein Paar nächste Zahlen der Tafeln fällt. Deutlich ist alsdann daß der Bogen welcher dem was man gefunden hat zugehört, auch zwischen die beyden Bogen fällt, die erwähnten nächsten Zahlen zugehören.

Gesetzt man fände für einen Sinus 4718234; Nun geben die Tafeln

Sin 28° 9′ = 4717815
. . . 10′ = 4720380

Unterschied = 2565

Gewiß ist also daß der Bogen welchem der gefundene Sinus gehört, zwischen die angezeigten beyden fällt. Man kann aber zu wissen verlangen wieviel er etwa den kleinsten übertrifft, wieviel Secunden er über die 9 M. beträgt.

II. Das findet man nach folgender Voraussetzung: Wenn die Bogen nur so wenig unterschieden sind, so verhalten sich die Unterschiede ihrer Sinusse wie die Unterschiede der Bogen.

Man nenne also x die Zahl von Secunden um welche der gesuchte Bogen den kleinsten der bey den gegebenen übertrifft. So rechnet man für das Exempel folgender Gestalt.

Gef

Digitized by Google

Gef Sinus = 4718234
nächst kleiner = 4717815

Unterschied = 419

Unterschied der beyden Bogen in den Tafeln = 60 Secunden; also

2565: 419 = 60: x
giebt x = 9

oder den gesuchten Bogen 28° 9′ 9″.

III. Obgleich die Division nicht aufgeht so sieht man doch leicht, daß die Voraussetzung (II) in völliger Schärfe wahr seyn müsste, wenn die Division immer weiter auf kleinere Theile der Secunde fortgesetzt werden sollte. Das ist diese Voraussetzung aber nicht, sondern nur beynahe wahr, also kann man ihren Gebrauch nicht so weit treiben. Vollständigere Theorie als ich hie beybringen darf, zeigt, daß sich so Secunden finden lassen, die Zehntheile weniger zuverlässig.

IV. Eben die Voraussetzung lehrt auch für einen Bogen der zwischen ein paar nächste der Tafeln fällt, den Sinus finden.

Z. E. der Sinus von 28° 9′ 40″ übertreffe den kleinsten der beyden angeführten um y; So ist

60: 40 = 2565: y
y = 1710
zu 4717815

Sin 28° 9′ 40″ = 4719525

V. Solche Rechnungen zu erleichtern, sind in manchen Tafeln Unterschiede der nächsten Sinus angegeben; zuweilen diese Unterschiede mit 60 dividirt, daß man so Unterschiede für eine Secunde hat.

VI. Man sieht leicht wie dieses auf Tangenten u. d. gl. Logarithmen, u. s. w. angewandt wird, wenn man auch von ihnen (II) annimmt.

VII. Gesetzt eine Tangente habe zum Logarithmen 9, 4774325 die Tafeln geben.

log

log tang 16° 42′ = 9,4771421
43 = 9,4776009

4588

Der gegebene Logarithme, übertrifft den kleinsten vorstehender beyden um 2904;
Also 4588 : 2904 = 60 : x
also x = 37,9 und der gesuchte Bogen = 16° 42′ 37″, 9.

VIII. So findet man wie in (IV) Logarithmen des Sinus oder der Tangente für einen Bogen, der unter Graden und Minuten, noch Secunden enthält.

IX. Die niedrigste Zifer eines Sinus u. s. w. ist manchmahl um 1 grösser als die Zifer in dieser Stelle seyn würde wenn man auch die folgenden niedrigern beybehalten hätte, und das kann zuweilen auf Zifern die zunächst höher sind als die niedrigsten in den Tafeln einen Einfluß haben. Dieses zeigt noch weiter warum die Rechnung wie (III) sich nicht auf ganz kleine Theile erstrecken läßt, weil die Zahlen die dabey gebraucht werden nicht vollkommen richtig sind, wenn auch die Voraussetzung (II) es wäre.

Das alles gilt begreiflich von allen trigonometrischen Zahlen und Logarithmen.

X. Eine Grösse die zwischen ein Paar nächste in den Tafeln befindliche fällt, durch Unterschiede und eine solche Voraussetzung wie (II) ein Beyspiel ist berechnen, heißt: sie durch **Proportionaltheile finden**. Das Verfahren ist überall gewöhnlich, wo man Tafeln hat, die nach gewissen Unterschieden fortgehn, und aus ihnen etwas berechnen will, das zwischen die Glieder dieser Tafeln fällt.

XI. Bey den trigonometrischen, hat man allerley Mittel erdacht, diese Arbeit, die für genaue Bestimmung des Gesuchten sehr oft erfodert wird, zu erleichtern.

Eines, das einfachste ist: die Unterschiede nächst auf einander folgender Glieder, neben sie zu setzen.

So

Digitized by Google

So erspart man dem Rechner den Abzug durch den er z. E. in (II) 2565 finden muß.

XII. Multiplication und noch mehr Division mit 60 machen Beschwerlichkeit. Deßwegen hat schon Pitiscus im Canon bey seiner Trigonometria, den jedesmahligen Unterschied, mit 60 dividirt, also für 1 Sec. angegeben, welches in Shervins Tables auch so ist. In dem schulzischen ist $\frac{1}{6}$ des Unterschiedes angegeben also für 10 Sec.

In Pitisci Thesauro, und den Ausgaben der grössern Gardinerischen Tafeln, gehen die Bogen von 10 zu 10 Secunden, und sind die jedesmahligen Unterschiede beygesetzt; da rechnet man also bequem mit 10.

XIII. Ich habe mir einmahl eine Tafel der Logarithmen für alle Vielfache des Bruchs $\frac{1}{60}$ bis auf das 59fache berechnet, die mir die Multiplication und Division ersparte. So, im Exempel (II)

log 419 = 2, 6222140
log 2565 = 3, 4090874

log (x : 60) = 0, 2131266 — 1

Dieser Logarithme fällt zwischen die Logarithmen von 9 und von 10 Sechszigtheilen.

Eben so für (IV)

log 2565 = 3, 4090874
log $\frac{40}{60}$ = 0, 8239087 — 1

log 7 = 3, 2329961
giebt y = 1710

XIV. Ich selbst bediene mich dieser meiner Arbeit nicht, sondern der Tafeln die von 10 zu 10 Secunden gehn. Bey Tafeln die durch ganze Minuten gehn, wäre immer die Frage, ob es nicht besser wäre die Unterschiede der nächsten Glieder ganz hinzusetzen, und eine solche Hülfstafel von 59 Logarithmen beyzufügen, als die Unterschiede mit 60 oder 6 zu dividiren und dabey doch noch wirkliche Multiplication und Division zu erfodern. Auserdem, daß man sich darauf verlassen muß, daß die dividirten Unter-

Digitized by Google

Unterschiede, richtig sind berechnet und abgedruckt worden, so verliehrt man auch dadurch einen Vortheil den die ganzen Unterschiede geben, daß man sie leicht mit den Gliedern neben den sie stehn vergleicht, so Druckfehler die etwa in diesen Gliedern vorfallen wahrnimmt, und weil die Unterschiede immer durch einige Glieder einerley bleiben, oder sich nur wenig ändern, vermittelst ihrer die Tafeln bequemer prüft.

Von den rechtwinklichten Dreyecken.

3. Satz. Aufgabe.

In einem rechtwinklichten Dreyecke CDE 2. F. aus der Hypothenuse CD und einer Seite DE, die schiefen Winkel zu finden:

Aufl. CD : DE = r : sin DCE;
und EDC = 90° — DCE
oder auch CD : DE = r : cosin CDE

$$\text{Also ist sin DCE} = \frac{\text{r. DE}}{\text{CD}} = \text{cof CDE}$$

und wenn man die Logarithmen gebraucht
l sin DCE = l r + l DE — l CD = l cosin CDE.

Exempel. CD = 5; DE = 4; also sin DCE $= \frac{10\,000\,000 . 4}{5} = 8\,000\,000 =$ sin 53° 7′ + Also CDE = 36° 53′ —

In Logarithm. l r + l DE = 10, 6020600
l CD = 0, 6989700
l sin DCE = 9, 9030900 = l sin 53° 7′ +

Zus.

Zuf. EC läſſt ſich aus G. 15. S. finden; hie aber aus dem gefundenen Winkel folgendergeſtalt: r: cof DCE = CD: CE oder CE = $\frac{\text{cof DCE. CD}}{\text{r}}$ und l cof DCE + l CD − l r = l CE.

Im Exempel iſt CE = $\frac{6001876.5}{10\,000\,000} = \frac{30009380}{10000000}$ = 3,0009380: Es iſt aber eigentlich CE = 3 Nähmlich DCE iſt etwas weniger als 36° 53′ Weil man alſo die Winkel ſelten völlig genau, ſo wie ſie in den Tafeln ſtehen, findet, ſo kann man kleine Fehler begehen, wenn man die Winkel, die in den Tafeln den geſuchten am nächſten kommen, für die wahren annimmt, und daraus weiter ſchlieſſt. Aufmerkſamkeit auf die Umſtände muß lehren, ob dieſe Fehler bey der Abſicht, die man hat, beträchtlich werden. Es erhellet aber ſchon hieraus, daß es zu ſcharfen Beſtimmungen nützlich iſt, ſoviel ſich thun läſſt, Linien aus Linien ohne die Winkel zu finden, obgleich die Rechnung zuweilen beſchwerlicher wird.

Das Dreyeck deſſen Seiten 3; 4; 5; ſind, iſt als das einfachſte unter den rechtwinklichten merkwürdig. Aus den löſeriſchen Tafeln (Aſtron. Abh. II. Samml. Vorrede) und durch Proportionaltheile (2. S. 6. Anm.) finde ich DCE = 53 Gr. 7 M. 48 S. 22 T. und CDE = 36 Gr. 52 M. 11 S. 38 T.

4. Satz.

Digitized by Google

4. Satz. Aufgabe.

Im Dreyecke CAG 2. F. aus den beyden Seiten CA, AG, die Winkel zu finden.

Aufl. CA : AG = r : tang ACG oder tang ACG = $\frac{r.\ AG}{CA}$ und l tang ACG = l r + l AG − l CA.

Ex. Wenn CA = 3, AG = 4, so ist tang ACG = $\frac{10000000.4}{3}$ = 13333333 = tang 53° 7′ +

Zus. So wäre um die Hypothenuse zu finden, CG = $\frac{CA \text{ sec } ACG}{r}$ oder weil man nicht in allen Tafeln die Secanten antrifft CG = $\frac{CA.\ r}{\cos ACG}$ und l CA + l r − l cos ACG = l CG.

Dieses gäbe im Exempel.

l CA + l r =	10,4771212
l cos ACG =	9,7782870
l CG =	0,6988342

Dieser Logarithme unter der Kennziser 3 aufgesucht (Arithm. V. 31.) gehört zu 4,999 + Es ist aber CA = 5.

Aus Tafeln, wo die Secanten anzutreffen sind, wie Ozanams, findet man CG = $\frac{3.16661458}{10000000}$, = 4,9984375.

5. Satz.

5. Satz. Aufgabe.

Im Dreyecke ECD, aus der Hypothenuse CD; und einem schiefen Winkel DCE, die Seiten zu finden.

Aufl. r: sin DCE = CD: DE; und r: cos DCE = CD: CE.

6. Satz. Aufgabe.

Aus einer Seite EC und einem schiefen Winkel ECD die andere Seite und die Hypothenuse zu finden.

Aufl. r: tang ECD = EC: ED und cos ECD: r = EC: CD.

1. Anm. Wären EC und EDC gegeben, so fände man ECD = 90° — EDC und brächte also die gegebenen Dinge unter die hie angenommenen Umstände.

2. Anm. Man könnte auch statt der ersten Proportion die brauchen: cos ECD: sin ECD = CE: ED. Wenn es aber angeht, braucht man eine Proportion, in welcher der Halbmesser vorkömmt, welches die Rechnung, mit Zahlen, und mit Logarithmen, verkürzt.

3. Anm. Statt der zweyten Proportion liesse sich auch setzen r: sec ECD = EC: CD aber man findet die Secanten nicht in allen Tafeln, und ihre Logarithmen noch seltener.

7. Satz. Aufgabe.

Das rechtwinklichte Dreyeck nebst den Tafeln, zum Winkelmessen zu brauchen.

Digitized by Google

Auf dem Papiere.

I. Wenn ein Winkel wie ACG 2. Fig. gezeichnet ist nehme man von einem Maaßstabe CD = 1000; fälle das Perpendikel DE, und messe solches in eben solchen Theilen.

Nun suche man in den Sinustafeln die den Halbmesser = 10 000 000 voraussetzen, einen Sinus, der die Zahl dieses Perpendikels, und noch vier Zifern zu ihrer rechten Hand hat, der neben ihm stehende Winkel ist = ACG.

Nähmlich: Man nimmt hie für den Sinustotus AC = 1000 an, um also alle Sinus auf diesen Sinustotus zu bringen muß man von jedem die vier niedrigsten Zifern abschneiden, weil man kleinere Theile vom Sin. Tot. als Tausendtheile, nicht in Betrachtung zieht.

II. Die Sinustafeln zeigen daß die höchsten drey Zifern eines Sinus, durch mehr Minuten eben dieselben bleiben, nur die niedrigsten sich mit jeder Minute ändern.

III. Selbst die Figur des Kreises zeigt, daß zu gleichen Aenderungen der Bogen z. E. 1 Grad oder 1 Minute immer kleinere Aenderungen der Sinusse gehören, je näher die Bogen an 90 Gr. sind; daß die Sinus von 80 und 81 Grad, nicht so sehr unterschieden sind als die von 10 und von 11 Grad. Die Tafeln zeigen das noch umständlicher.

Digitized by Google

IIII. Also giebt das Verfahren (I) den Winkel nicht auf einzelne Minuten, bey kleinen Winkeln bis auf 4 oder 5 Minuten, bey grössern mit grösserer Unsicherheit, nahe an 90 Graden kaum auf 15 Minuten.

V. Kleine Winkel also doch viel schärfer als der gemeine Transporteur. Für grössere verhielte man sich so:

Allemahl ist CDE soviel unter 45 Graden als DCE darüber. Man messe also CE so wird man daraus den Winkel CDE genauer haben, und nun aus ihm DCE.

Ex. Gesetzt man fände CD = 939; so könnte der Winkel zwischen 69 Gr. 53 M. und 70 Gr. 3 M. fallen, obgleich doch an jeder Gränze eine Minute wenigstens sich wohl absondern liesse, weil für die eine, CD beynahe noch nicht 939 seyn müsste, und für die letzte beynahe 940.

Indessen folgt aus dieser Messung, daß CE zwischen 344 und 341 fallen muß.

Ist CE = 342; so fällt CDE zwischen 20 Gr. und 20 Gr. 3 M. also CED zwischen 70 Gr. und 69 Gr. 57 M.

VI. Man misst also des Winkels den man eigentlich wissen will Sinus oder Cosinus, den kleinsten von beyden.

Wenn beyde ohngefähr gleich sind, oder um 45 Gr. ist also die Ungewißheit am grössten.

Digitized by Google

Die Sinustafeln zeigen, daß um diesen Winkel, die höchsten drey Zifern etwa 5 bis 6 Minuten einerley bleiben.

Also findet man durch dieses Verfahren den Winkel immer innerhalb 5 bis 6 Minuten genau, im Ziehen des Perpendikels und Messen, alles richtig angenommen.

VII. Vermöge der Kreisrechnung ist ein Bogen von 5 Minuten = 0,001454 des Halbmessers. Nun ist ein Tausendtheil eines halben, selbst eines ganzen Fusses noch nicht sehr merklich. Also werden gezeichneter Winkel Schenkel, selten so lang seyn, daß man den Winkel innerhalb 5 M. genau angeben könnte.

VIII. Einen Winkel ECD von gegebener Grösse zu zeichnen, könnte man seinen Cosinus und Sinus erwähntermassen auf den Halbmesser 1000 bringen, den ersten auf CE tragen, den andern auf das Perpendikel ED.

IX. Bequemer und zugleich schärfer ist der Gebrauch der Tangenten. Man nehme CA = 1000 und auf dem Perpendikel AG = des Winkels Tangente auf den Halbmesser 1000 gebracht, so ist ACG der verlangte Winkel.

X. Hie entsteht eine Unbequemlichkeit, wenn der Winkel viel über 45 Gr. ist. Da ist AG grösser als 1000, sehr groß wenn er nahe an 90 Gr. kömmt.

Da setze man auf AC das Perpendikel CH = 1000, und nehme das Perpendikel darauf

HK

Digitized by Google

HK = der Cotangente auch auf den Halbmesser = 1 gebracht.

An AC einen Winkel von 70 Gr. 12 M. zu verzeichnen, nehme man HK = 360 so ist ACK der gesuchte Winkel, wiederum mit einer Unsicherheit von 4 oder 5 M, die Perpendikel richtig angenommen.

Man kann also alle Winkel vermittelst Tangente oder Cotangente auftragen, ohne eine längere Linie als 1000 zu brauchen. Stumpfe begreiflich vermittelst ihrer Nebenwinkel.

Auf dem Felde.

XI. Des Quadrats ACHL Seiten AC = CH seyn jede = 1000. Auf die Seite AL seyn von A aus, und auf die HL, von H aus die Tangenten aller Winkel von 1 Gr. 2 Gr. .... 45 Gr. getragen. An CA sey eine unbewegliche Diopter, um C drehe sich eine bewegliche, so lang als des Quadrats Diagonale. Richtet man nun eine nach einem Gegenstande, die andere nach einem andern so gäbe eine der beyden eingetheilten Seiten den Winkel.

Z. E. Wenn CK die Lage der beweglichen Diopter wäre gäbe sich ACK vermittelst der Cotangente HK.

XII. Da würden die Abtheilungen auf den Seiten ungleich. Wollte man sie in gleiche Theile theilen, so müsste man berechnen, wieviel Thei-

Digitized by Google

le der Tangente dieses oder jenes Winkels zugehörten.

XIII. Wie (XII) ist das Quadratum Geometricum, vor einigen Jahrhunderten gebraucht worden. Quadratum geometricum praeclarissimi Mathematici Georgii Purbachii Nürnb. 1516 hat die Seiten AL, HL, jede in 1200 Theile getheilt, und eine Tafel, was für ein Winkel jeder Menge von Theilen gehört; Nähmlich Tangenten, für den Sinustotus 1200.

So gehören 100 Theile, nach P. Angabe zu 4° 45′ 49″ völlig wie man durch die jetzigen Tafeln den Winkel finden wird dessen Tangente sich zum Sinustotus = 100: 1200 verhält, daß also P. sehr genau gerechnet hat. Da ihm Logarithmen und viel andere jetzige Hülfsmittel fehlten, so zeigt die Berechnung einer solchen Tafel, wie erstaunliche Arbeitsamkeit ein Deutscher des 15. Jahrhunderts mit Stärke des Geistes vereinigt hat.

XIV. Die gleichen Theile auf den Seiten des Quadrats machten es auch zum Feldmessen brauchbar, es stellte Dreyecke dar die denen auf dem Felde ähnlich waren.

Gebrauch des geometrischen Quadrats lehrt Clavius Geom. Pract. L. III. Von umbra recta und versa darauf sehe man Optik 24.

XV. Ein ander Werkzeug das auch auf Tangenten ankömmt, ist: der Jacobsstab, baculus Iacobi, radius astronomicus, der Gradbogen

Digitized by Google

gen, Arbaleſtrille. Supplement zu Leupolds Theatro Machinarum (Leipz. 1739. fol.) VI. Cap. 67 u. f. §.; Seeſpiegel darinn Unterweiſung in der Kunſt der Seefahrt, mit 60 Seecharten (holländ.) 21 u. f. Hauptſtücke. Aſtronomen und Feldmeſſer brauchten dieſes Werkzeug ſtark im 16. Jahrhunderte. Der Scheitel des Winkels den es meſſen ſoll, müſſte in einem kleinen Loche ſeyn, hinter welchem ſich das Auge befindet, weil er über im Auge iſt, ſo wird ſolchergeſtalt ſeine Stelle falſch angenommen. Wegen dieſes und anderer Fehler hat ſchon Tycho de Brahe das Werkzeug verworfen, indeſſen Thomas Digges in Schutz genommen und zu verbeſſern getrachtet Alae ſeu Scalae mathematicae ... Lond. 1573. Auf feſtem Lande iſt es auſer Gebrauch gekommen, ob ſich gleich deſſelben noch Dörfel bediente, der berühmt iſt weil er die paraboliſche Geſtalt einer Kometenbahn bemerkt hat. Aſtronomiſche Betrachtung des groſſen Cometen 1680 und 1681; 4 Seite. Jetzo brauchen ihn noch die Schiffer. Bouguer, Nouveau Traité de Navigation L. 4. ch. 2.

Von gleichſchenklichten Dreyecken.

8. Satz. Aufgabe.

In einem gleichſchenklichten Dreyecke LMN 4. F. aus den gegebenen Dingen die geſuchten zu finden.

Digitized by Google

Aufl. Man lasse aus der Spitze MP auf die Grundlinie senkrecht herab; so ist $LP = \frac{1}{2} LN$; und $LMP = \frac{1}{2} LMN$. (G. 9. S. 5. Z.).

Ferner $LM : LP = r : \sin LMP$; also, wenn der Winkel $LMN = u$ heisst;

I; $\sin \frac{1}{2} u = \frac{r. \frac{1}{2} LN}{LM}$ II; $LM = \frac{r. \frac{1}{2} LN}{\sin \frac{1}{2} u}$;

III; $\frac{1}{2} LN = \frac{LM. \sin \frac{1}{2} u}{r}$.

Diese drey Formeln dienen, aus den Seiten die Winkel, oder aus den Winkeln und einer Seite die andere zu finden.

9. Satz. Aufgabe.

Das gleichschenklichte Dreyeck zum Winkelmessen zu brauchen.

I. Wenn man von eines Winkels M Spitze, gleiche Schenkel ML, MN, misst, und die Sehne, LM, so lässt sich vermöge des 8. S. allemahl der Winkel daraus berechnen. Dieses Verfahren einen Winkel durch Sehnen zu messen, hat sehr weitläuftigen Gebrauch auf dem Papiere, auf dem Felde, bey Werkzeugen.

II. Man nehme allemahl eine und dieselbe Länge $= b$ auf den Schenkeln, so kann man sich im voraus Tafeln berechnen, welche entweder für jeden angenommenen Winkel $= w$, die Sehne $= c$, oder für die angenommene Sehne den Winkel darstellen.

III.

III. Eine solche Tafel, die Ozanam zugeschrieben wird, in Sturms Ausgabe von Strauchs Tafeln, und sonst häufig zu finden ist, setzt b = 30 Fuß, und läßt c durch Paare von Zollen wachsen, giebt dabey den jedesmahligen Winkel an, der also selten ganze oder halbe Grade, sondern immer Grade und Minuten enthält.

J. Paul Eberhards Beschreibung einer neuen Meßtafel Halle 1753; setzt jeden Schenkel = 500 und giebt an wieviel solcher Theile als Sehne zu jeder Zahl ganzer und halber Grade gehören. Da die Meßkette gewöhnlich 5 Ruthen jede von 10 Decimalfuß hält, so kann sie zu Abmessung der Schenkel dienen, wenn man sich einen solchen Fuß wiederum in 10 Theile getheilt vorstellt.

Franz Christoph Jeze Prof. zu Liegnitz gemeinnützige Praxis auf dem Felde und Papiere ohne Winkelmesserinstrumente alle Winkel zu messen ... Breslau 1776; nimmt die Schenkel auch 30 Fuß, giebt Sehnen in zehntheilichen und in zwölftheilichen Maassen.

IIII. Am bequemsten ist es wohl die Schenkel so anzunehmen, wie der Sinustotus in den Tafeln, Also etwa = 1000 weil eine grössere Menge von Theilen sich nicht so bequem würde brauchen lassen.

V. Nimmt man nun für einen Winkel, den Sinus von $\frac{1}{2}$w aus den Tafeln, und verdoppelt ihn, so hat man die Sehne dieses Winkels für

Digitized by Google

den Sinustotus der Tafeln. Man kann die niedrigsten vier Zifern abschneiden, wenn der Halbmesser nur 1000 seyn solt. Vom Sinus sogleich sie abzuschneiden, ehe man ihn verdoppelt, gäbe etwas geringere Richtigkeit, weil die niedrigern Zifern bey der Verdoppelung Einfluß in die höhern haben.

Ex. Man sucht die Sehne von 28 Gr. 12 M.

Sin 14 Gr. 6 M. = 2436150
Sehne 28 12 = 4872300
Also 487 für den Halbmesser 1000.

So findet man aus den gewöhnlichen Tafeln, die Sehnen nur von 2 zu 2 Minuten, das ist aber auch bey dem Halbmesser 1000 mehr als genug (7. S. VII). Allenfalls kann man die niedrigste der Zifern die man behält um 1 vergrössern, wenn die die man wegläßt beynahe so viel betragen.

Dergleichen Sehnentafeln giebt P. Bernard Gruber, Horographia Trigonometrica (Prag. 1718.).

VI. Aus 7. S. IV. erhellt, daß grosser Winkel Sehnen mehrere Minuten durch in Tausendtheilen des Halbmessers nicht unterschieden sind. Daher wird man ohne grossen Nutzen, die Tafel über 90 Gr. erstrecken. So weit hat sie Gruber, und schon da sind immer der nächsten Bogen Sehnen nicht unterschieden.

VII. Wenn man annimmt daß sich 60 Grad, von einem Winkel der grösser ist leicht abschneiden

Digitized by Google

den lassen, und so 2. 60 Grad von einem der mehr als 120 beträgt, so braucht man nur die Sehnen bis 60 Gr.

VIII. Der geradelinichte Transporteur entsteht, wenn man solche Sehnen auf Linien trägt.

Die Sehnen aller einzelnen Grade auf eine Linie getragen, auf ein Perpendikel durch ihren Endpunct sechs gleiche Theile gesetzt, und eine Verzeichnung, wie beym verjüngten Maaßstabe (Geom. 32. S. 4. Anm.) vollendet, kann man die Sehnen aller Bogen von 10 zu Minuten abnehmen. Daß diese Verzeichnung nicht ganz geometrisch richtig ist, weil die Sehnen sich nicht wie die Bogen verhalten, selbst eine noch grössere Unrichtigkeit, wenn man sie nicht durch alle Grade einzeln, etwa von 5 zu 5 Graden auftrüge, hat bey einem so kleinen Halbmesser nichts zu bedeuten.

Dieses Werkzeug wird zu Messung der Winkel auf dem Papiere, immer dem eingetheilten Halbkreise* vorgezogen, dessen Halbmesser gewöhnlich zu klein ist auch nur halbe Grade mit Sicherheit anzugeben.

Es bis auf 90 oder gar 180 Gr. zu erstrekken scheint ziemlich unnütz (VI). Ich habe es mir zu meinem Gebrauche bis auf Sehnen von 60 Gr. verfertigen lassen. Da kann diese Sehne oder der Halbmesser, etwa ein halber Fuß seyn und die Abtheilungen fallen kenntlicher und

sicher

sicherer als wenn die Sehne von 90 Gr. oder gar der Durchmesser diese Grösse haben.

IX. Tobias Mayer bediente sich auf dem Felde eines Winkelmessers, ohne eingetheilten Rand, den Winkel gab ein solcher Transporteur an, den er dann freylich bis auf 90 Gr. erstrekken musste. Nova methodus perficiendi instrumenta geometrica. Commentar. Soc. Sc. Gott. T. II. ad 1752. Er hat aber nachdem selbst statt dieses Werkzeuges sein Scheibeninstrument mit eingetheiltem Rande gebraucht.

X. Schon vor Alters hatte man Regeln mit Dioptern so zusammengefügt daß sich ihr Winkel ändern ließ, welchen dann ein eingetheiltes Linial als Sehne angab. Dergleichen Regulae Ptolemaicae wurden Sonnenhöhen zu messen von Bernhard Walther zu Nürnberg um 1475 gebraucht. Man sehe das Titelkupfer bey Joh. Phil. von Wurzelbau; Vranies Noricae Basis astronomica Nürnb. 1719. fol. Im Buche sind W. Werkzeug und Beobachtungen beschrieben.

Der Augspurgische Mechanicus Brander, hat Sehnen zum Winkelmessen, bey mehrern seiner Werkzeuge angebracht. Beschreibung eines Spiegelsextanten, Augsp. 1774. Beschreibung und Gebrauch eines geometrischen Instruments in Gestalt eines Proportionalzirkels; 1780.

XI. Vom Gebrauche der Sehnen zum Winkelmessen, wird unten 18. S. noch mehr vorkom-

Digitized by Google

kommen. Auch gehört dahin unterschiedenes in meiner astronomischen Abhandlungen II. Sammlung 5. Abhandl.

Vom Proportionalzirkel.

XII. Dieses Werkzeug wie wir es vom Galiläus bekommen haben, beruht eigentlich darauf, daß man zwischen ein Paar auf einerley Art getheilten Linien, den Winkel nach Gefallen ändert, und der Grundlinie des gleichschenklichten Dreyecks das so entsteht, durch Theilungspuncte der Schenkel, Parallelen legt.

Galilaei de Galilaeis, de Proportionum instrumento a se invento tractatus, a Matthia Berneggero ex Italica in lat. lingu. translatus Argentor. 1612. Ge. Galgenmairs Unterricht der hochnützl. Instrumenten Proportional Schregmäß und Cirkels. Ulm 1615. Andr. Alexander, kurzer Bericht vom Gebrauch des Proportionalcirkels Jena 1682. Pock Gebrauch des Proportionalcirkels Salzb. 1686. Michael Scheffelts Unterricht vom Proportionalcirkel Ulm 1708; Dieses Buch als das deutlichste und vollständigste hat immer Liebhaber gefunden. Es ist daher von neuem erschienen: M. S. U. von Pz. Neue .... Auflage von Joh. Ephr. Scheibel Prof. der Math. und Phys. zu Breslau. Bresl. 1781. Hr. Prof. Scheibel hat das Werk dem jetzigen Zustande der Wissenschaft gemäß durchgehends umgearbeitet, viel-

lehr-

Digitized by Google

lehrreiches beygebracht, und die Geschichte des Werkzeugs nach seiner grossen litterarischen Kenntniß geliefert, so daß das Buch jetzo die Stelle aller andern über diesen Gegenstand vertreten kann.

Henrion, usage du Compas de Proportion ist zu Rouen 1680, von neuem herausgekommen. Ozanam Usage du C. d. Pr. 1691. Clavius nennt ihn: Instrumentum Partium Geom. Pract. L. I. cap. I.

Die Engelländer von der Gestalt die es geöffnet darstellt Sector.

The Works of Edmund Gunter 1673. 5. Ausgabe.

Man hat auch Proportionalzirkel in Kupfer gestochen, um sie auf hölzerne Schenkel zu ziehen, wie man eben dergleichen mit Quadranten u. s. w. gemacht hat. In Deutschland ist das vor mehr als einem Jahrhunderte geschehn, verschafft immer Anfängern wohlfeile Werkzeuge, an den sie sich zum Gebrauche besserer üben. Samuel Dunn Introd. to practical Astronomy Lond. 1774. schlägt so was zu ernstlichem Gebrauche vor.

XIII. Statt des Zirkels mit zween eingetheilten Schenkeln, ein einzelnes Linial zu brauchen, hat Adrian Metius gewiesen, Praxis nova geometrica per usum circini et regulae Proportionalis Franek. 1623, auch bey seiner Arithm. et Geom. Leid. 1640.

Etwas

Digitized by Google

Etwas anders ist das von Benj. Bramer angegebene Bericht und Gebrauch eines Proportionallinials . . . . Marp. 1617.

XIV. Ein Werkzeug über das soviel ist geschrieben worden, muß nothwendig in grossem Ansehn gestanden haben. Auch nennt es Bernegger auf dem Titel sein. Uebers. Compendium totius Geometriae. Es stellt mit einem Worte, durch ähnliche Dreyecke, Regeln Detri dar: so fanden es Practiker bequem die nicht gern rechnen.

Die Linien darauf werden alle von einem tausendtheilichen Maaßstabe nach Tafeln aufgetragen die man in den Büchern findet. In der Regel Detri die es darstellt, darf also keine Zahl grösser als 1000 seyn. Wer sich nun vor einer Regel Detri fürchtet wo keine Zahl grösser als 1000 ist!

Mit den Logarithmen rechnet man auch für grössere Zahlen, viel bequemer als man mit diesem Werkzeuge arbeitet, schärfer versteht sich ohnedem. Will man das Facit nur nach einem tausendtheilichen Maaßstabe verzeichnen, so wird diese Zeichnung aus der Rechnung allemahl viel richtiger, als man sie durch Messen auf dem Werkzeuge bekommen hätte.

Mir hat es also immer sehr entbehrlich geschienen, zumahl da es bey einer mässigen Grösse sehr kostbar wird. Hr. Prof. Scheibel urtheilt davon eben so. Zum Vorzeigen muß man es

Digitized by Google

es freylich haben wie andre entbehrliche Sachen, und dazu bin ich gerade mit einem halben Duzend versorgt, darunter grosse und gute.

Am brauchbarsten ist noch die Linie gleicher Theile oder die arithmetische, aus der auch immer die übrigen abgetheilt werden. Die kann so gleich dienen eine gegebene Linie in drey, fünf u. d. gl. Theile zu theilen. Aber dazu bezahlt man doch wohl kein Instrument mit Louisd'or.

XV. Ein andres Werkzeug wird mit eben dem Nahmen belegt. Phil. Horcheri Libri tres, in quib. primo constructio circini proportionum edocetur . . . Mainz 1605. Levin Hulsius habe nur den Gebrauch gelehrt, Horcher giebt die Theorie. Ein Paar gleiche Liniale, jedes eingetheilt, und an beyden Enden spitzig, sind mit einer Hülse zusammengefügt, die sich an ihnen so verschieben lässt, daß auf eine Seite von ihr, mehr oder weniger von jedem Liniale kömmt, von den Verticalwinkeln welche die beyden Liniale machen, einer längere Schenkel, der andre kürzere bekömmt. Leupold Theatr Ar. Geom. 16. Cap. führt des Hulsius 1603. erschienene Beschreibung an, wo das Werkzeug Jobst Burgen zugeeignet wird. L. glaubt Galiläus habe davon zu seinem Anlaß genommen, welcher Verdacht aber unbillig ist. B. Werkzeug hat ähnliche Dreyecke an Verticalwinkeln entgegengesetzt; G. seins auf einer Seite der gemeinschaftlichen Spitze. Jedes Paar auf einerley

Art

Art getheilter Linien, giebt beym G. eine andre Gattung ähnlicher Dreyecke dergleichen Mannichfaltigkeit B. Werkzeug nicht verstattet. Auch ist die Aenderung der Dreyecke durch Verschiebung der Hülse sehr unbequem, schwerlich einer grossen Genauigkeit fähig, und das mag wohl mit zu den Ursachen gehören warum bey seinem Ausübungen B. Werkzeug bald von G. seinem ist verdrungen worden.

Ich erinnere mich nur ein einziges mahl einen Proportionalzirkel von Burgs Art in Händen gehabt zu haben. Er gehörte einem damahls hie befindlichen Weinküper der mich über einige Dinge der Büttnerprofession befragte. Wahrscheinlich brauchen die Böttticher also noch solche Zirkel.

Man hat Zirkel mit vier Spitzen da die Schenkel des einen Paars halb oder den dritten Theil so lang sind, als des andern Paars, dadurch Linien in 2 oder 3 Theile zu theilen. Auch Tasterzirkel versieht man mit Spitzen, an geraden Schenkeln, die den Abstand der Spitzen an den krummen angeben. Sind zu Burgs Zeiten solche Zirkel schon bekannt gewesen, so hat ihm leicht einfallen können, den Kopf so vorzurichten, daß der sich an den Schenkeln verschieben lässt.

XVI. Ein neuer Proportionalzirkel von vier fünf sechs oder mehr Spitzen ... an Tag gegeben durch Ge. Galgemayr. G. Vorrede ist 1619

Digitized by Google

datirt, das Buch aber nach desselben Tode einige Jahr später herausgekommen mit Dan. Schwenters Vorrede. G. berichtet er habe diesen Zirkel von Joh. Hasenbart, Bürger und Liebhaber der Mechanik in Nürnberg als eines Kunstliebenden Inventum erhalten. Es sind ein paar eingetheilte Schenkel, die sich in jeden Winkel stellen lassen, an ihnen lassen sich unterschiedne Spitzen vermittelst Hülsen verschieben, noch gehört dazu ein oder mehr Winkelhaken. So geben die Spitzen an den Schenkeln, allerley Längen derselben, und die Winkelhaken, geben mit jenen Schenkeln allerley Dreyecke. So löst G. 100 Aufgaben dadurch auf. Man bringe sagt er oft dadurch zuwege das durch das Schregmaaß nicht wohl seyn kann. , . . Aber gewiß wird man dadurch nichts zuwege bringen, das man nicht bequemer und richtiger ohne alle Proportionalzirkel haben kann.

XVII. Eigentlich sind beym Proportionalzirkel, Zahlen auf Linien, in gehörigen Entfernungen von einander getragen, daß man so statt Rechnens messen kann. Dergleichen ist zu mehr Absichten angewandt worden. Man hat so Logarithmen und trigonometrische Zahlen auf Stäbe getragen, da durch Messen sich die Rechnungen machen lassen. Dergleichen beschreibt Schildknecht, Harmonia . . d. i. Beschreibung Festungen zu bauen . . . (Stettin 1652.) I. Th. 2. Cap. Auch der Hr. v. Segner hatte als er noch

Digitized by Google

noch zu Göttingen lehrte dergleichen Liniale angegeben, da man trigonometrische Zahlen an einander verschiebt, und so rechnet. Daß bey solchen Vorrichtungen die Zahlen sehr abgekürzt, die Theile welche die Einheiten vorstellen ziemlich klein werden, ist natürlich. Man kann also keine grosse Schärfe davon erwarten; und immer wird der Witz so was zu erfinden mehr werth seyn, als der Nutzen der Erfindung. Schildknecht, der sich auf seine Liniale im Ernste sehr viel zu gute that, erzählt 52. S. acht Vorzüge die sie vor den gedruckten Tafeln hätten bey deren keinem man ernsthaft bleiben kann.

Allgemeine Auflösungen der Dreyecke.

10. Satz. Lehrsatz.

In jedem Dreyecke ABC 5. F. verhalten sich die Seiten wie die Sinus der gegenüberstehenden Winkel.

Bew. Weil man um jedes Dreyeck einen Kreis beschreiben kann (G. 17 S. 1. B.) so ist in demselbigen (G. 21. S.) $\frac{1}{2}BC = \sin\frac{1}{2}BcC = \sin A$; $\frac{1}{2}CA = \sin\frac{1}{2}CaA = \sin B$; $\frac{1}{2}AB = \sin\frac{1}{2}AbB = \sin C$; alle Sinus für den Halbmesser des Kreises. Folglich $\frac{1}{2}BC : \frac{1}{2}CA = \sin A : \sin B$ oder $BC : CA = \sin A : \sin B$, und eben so $BC : AB = \sin A : \sin C$ und $CA : AB = \sin B : \sin C$.

11. Satz. Aufgabe.

Aus einer Seite AB und zween Winkeln A; B; die übrigen Seiten zu finden.

Aufl. Weil C allemahl gegeben ist; er mag nun unmittelbar, oder durch die beyden übrigen gegeben seyn, (G. 13. S.) so ist

sC: sA = AB: BC; und sC: sB = AB: AC.

Ex. A = 50° 7′; C = 20° 38′; AB = 12 R.;
also lAB = 1,0791812
lsA = 9,8849045
10,9641757
lsC = 9,5470189
lBC = 1,4171568

Dieser Logarithme unter der Kennzifer 3 aufgesucht; giebt BC = 26, 13 Ruthen.

12. Satz. Aufgabe.

Aus zwo Seiten BC; AB, und einem Winkel A der einer gegenüberstehet, die Winkel zu finden.

Aufl. BC: AB = sA: sC.

Ex. BC = 36; AB = 49; A = 35 7′
lsA = 9,7598515
lAB = 1,6901961
11,4500476
lBC = 1,5563025
lsC = 9,8937451

Die-

Digitized by Google

Dieser ist nur in der letzten Ziser von 1 sin 51° 32′ unterschieden: welches also die Grösse des Winkels in Minuten so genau ist als sich aus Tafeln finden lässt, wo Alles nur auf sieben Decimalstellen angegeben, die niedrigste Ziser davon selbst in der grösten Schärfe nicht allemahl richtig ist (2. S. 6. A. IX).

1. Zus. I. BD ein Perpendikel von B auf AC ist $= \frac{AB. \sin A}{r}$; kürzer kann BC nicht seyn (Geom. 9. S. 10. Zus.). Ich nehme BAC spitzig wie die 6. Fig. darstellt.

II. Ein Kreis um B mit BC beschrieben schneidet AC noch einmahl wie 6. Fig. in c.

III. Ist BC = Bc kleiner als BA, so liegt c näher bey D als A (G. 9. S. 11. Z.) und des spitzigen Winkels A Scheitel, hat nach einer Gegend zu zwey Dreyecke BAC, BAc, deren jedes den genannten Winkel, die Seite AB, und eine andere BC, oder die dieser gleiche Bc hat.

IV. Die Rechnung nach dem Satze nähmlich, giebt nur den Sinus des Winkels BCA, und eben der Sinus gehört auch dem stumpfen BcA.

V. Ist also der gegebene Winkel spitzig, und von den gegebenen Seiten, die ihm gegenüberstehende kleiner, als die an ihm liegende, so lassen sich zwey Dreyecke machen, deren eines völ-

Digitized by Google

lig eben die gegebenen Dinge wie das andre hat, nur eines einen spitzigen Winkel bey C, das andre einen stumpfen bey c. Man muß also wissen ob der gesuchte Winkel spitzig oder stumpf seyn soll.

VI. Ist aber der gegebene Winkel noch spitzig, und von den gegebenen Seiten, die ihm gegenüber, gröſſer als die anliegende, so liegt der zweyte Durchschnitt q, auf der verlängerten CA (angef. Zus.) und Bc steht dem stumpfen Winkel gegenüber, welcher des spitzigen BAC Nebenwinkel ist.

VII. Bleibt es allsdann dabey daß der gegebene Winkel spitzig seyn soll, so hat die Frage nur ein Dreyeck, BCA, und einen spitzigen Winkel, der mit eben den Buchstaben in eben der Ordnung bezeichnet wird, zur Antwort.

VIII. Wenn solchergestalt, c, in Absicht auf C, jenseits A liegt, so hat das Dreyeck BcA, eben die gegebenen Seiten, statt des gegebenen spitzigen Winkels, desselben stumpfen Nebenwinkel gegeben, der mit dem spitzigen einerley Sinus hat, der Winkel BcA ist spitzig (G. 9. S. 3. Z.) dem BCA gleich.

IX. Ist der gegebene Winkel stumpf, so muß von den beyden gegebenen Seiten, die ihm gegenüberstehende gröſſer seyn als die anliegende, (G. 9. S. 6. Z) und allsdann bestimmen die drey gegebenen Dinge nur ein Dreyeck, denn eine Seite so groß als die gegebene gegenüberstehende,

Digitized by Google

hende, machte mit der gegebenen anliegenden, zwar noch ein ander Dreyeck, stünde aber in demselbigen nicht einem stumpfen Winkel, sondern dem spitzigen Nebenwinkel des gegebenen stumpfen gegenüber.

So sey im Dreyecke BcA 6. Fig.; BcA = 128° 28′ also sin BcA = sin 51° 32′; Bc = 36, AB = 49; so giebt die Proportion AB: Bc = sin BcA: sin A, den Winkel A wie er vorhin angenommen war. Ein Kreis mit BA um B, schnitte AD das zweyte mahl so daß c zwischen A und diesem Durchschnitte läge.

2. Zus. Nachdem man B gefunden hat (S. 13. S.) findet man AC aus 11. S.

13. Satz. Aufgabe; Lehnsatz.

Aus der Summe S; und dem Unterschiede D, zwoer Grössen; x; y, die Grössen selbst zu finden.

Aufl. $S = y + x$; $D = y - x$; also $S + D = 2y$ und $\frac{1}{2}S + \frac{1}{2}D = y$; und $x = S - y = \frac{1}{2}S - \frac{1}{2}D$.

14. Satz. Lehrsatz.

In jedem Dreyecke verhält sich die Summe der beyden Schenkel AB + AC; zu ihrem Unterschiede AC — AB wie die Tangente der halben Summe der Winkel an der Grundlinie BC, zur Tangente des halben Unterschiedes eben dieser Winkel; oder, wenn diese Winkel ABC = β;

Digitized by Google

$ACB = \gamma$, gesetzt werden, wie tang $\frac{1}{2}(\beta+\gamma)$: tang $\frac{1}{2}(\beta-\gamma)$.

Bew. Man verlängere 7. F. den Schenkel CA der dem grössten Winkel β gegenüber stehet, und nehme von A wo die Schenkel zusammenstossen, AQ und AT; = AB; so ist $QAB = \beta+\gamma$. (G. 13. S. 1. Z.) = 2. ABT; also $ABT = ATB = \frac{1}{2}(\beta+\gamma)$ folglich $CBT = \frac{1}{2}(\beta-\gamma)$ (13. S.). Man ziehe QB und fälle auf sie das Perpendikel CV, welches mit TB parallel seyn wird (G. 11. S.). Also ist $BCV = TBC = \frac{1}{2}(\beta-\gamma)$ und $ACV = ATB = \frac{1}{2}(\beta+\gamma)$; aber QV; BV; sind der Winkel ACV; BCV; Tangenten für einerley Halbmesser CV; Also ist tang $\frac{1}{2}(\beta+\gamma)$: tang $\frac{1}{2}(\beta-\gamma) = QV : BV = QC : CT$ (G. 25. S.) = AC + AB: AC − AB.

15. Satz. Aufgabe.

Aus zween Schenkeln AB, AC, eines Dreyeckes, und dem eingeschlossenen Winkel A; die übrigen beyden, β, γ, zu finden.

Aufl. Weil $\beta+\gamma = 2R - A$; (G. 13. S.) so ist $\frac{1}{2}(\beta+\gamma) = R - \frac{1}{2}A$ und tang $\frac{1}{2}(\beta+\gamma) = \cot\frac{1}{2}A$. Man könnte nur den gegebenen Winkel halbiren, ohne daß man nöthig hätte ihn von 2R abzuziehn. Man muß aber doch die halbe Summe der unbekannten wissen, und also den halben gegebenen von R abziehen. So erspart diese Betrachtung nichts, zeigt aber

wie

Digitized by Google

wie man leicht einerley zweymahl, zur Probe berechnet. Nun kann man nach vorigem Lehrsatze sagen, $AC+AB : AC-AB = t\frac{1}{2}(\beta+\gamma) : t\frac{1}{2}(\beta-\gamma)$. Nachdem man also $\frac{1}{2}(\beta-\gamma)$ gefunden hat, so ist β und γ; aus 13. S. gegeben.

Exempel.

$AC =$	2115	$A =$	$63^\circ\ 36'$
$AB =$	1738	$2R =$	179 60
$AC+AB =$	3853	$\beta+\gamma =$	116 24
$AC-AB =$	377	$\frac{1}{2}(\beta+\gamma) =$	58 12

$lt\,\frac{1}{2}(\beta+\gamma) = 10,2075899$
$l(AC-AB) = 2,5763414$
$12,7839313$
$l(AC+AB) = 3,5857990$
$lt\,\frac{1}{2}(\beta-\gamma) \quad 9,1981323$

Dieser Logarithme giebt

$\frac{1}{2}(\beta-\gamma)$	$=$	8 Gr 58 M	4 S
$\frac{1}{2}(\beta+\gamma)$	$=$	58	12
β	$=$	67 10	4
γ	$=$	49 13	56

Wie die Secunden gefunden worden lehrt die 6. Anm. beym 2. Satze. Ist der gesuchten Winkel Summe, keine gerade Zahl von Minuten, so sucht man den Logarithmen der Tangente der halben Summe durch Proportionaltheile.

Zus. Aus den gefundenen Winkeln findet man die dritte Seite.

Digitized by Google

Man hat noch mehr Arten diese Frage zu beantworten.

Es sey das gegebene Dreyeck, ABC der 8. Fig. wo A der gegebene Winkel ist, und die beyden Schenkel gegeben sind, das übrige gesucht wird.

Ein Perpendikel von B auf AC giebt zwey rechtwinklichte Dreyecke, ABG; CBG;
Im ersten hat man

r: sin A = AB: BC
r: cos A = AB: AG

In jeder Proportion sind die drey ersten Glieder gegeben, also finden sich die vierten.
Folglich hat man
AC — AG = CG; und BG, also im Dreyecke BGC;

CG: BG = r: tang BCG auch
cos BCG: r = CG: CB

So sind im Dreyecke ACB, zweene Winkel bekannt, folglich der dritte ABC.

Ist der Winkel BAC stumpf, so fällt das Perpendikel von B auserhalb des Dreyecks auf die verlängerte CA; heisst man den Punct in welchem es sie schneidet auch G, so ist CG = CA + AG, das Uebrige bleibt wie vorhin.

Ob diese Rechnung bequemer und kürzer ist als die vorhergehende ... Wer das nicht so übersehen kann, darf nur das vorige Exempel nach ihr durcharbeiten.

Den

Digitized by Google

Den 13. und 14. S. zu lernen erspart sie. Und in dieser Absicht wird sie in folgender Schrift vorgetragen: Leichtere Auflösungen einiger schwieren trigonometrischen Aufgaben . . . von Friedrich Joh. Buck . . . der Log. und Metaph. Prof. Königsb. 1761. im 6. §.

Hr. Buck sucht das leichte darinn daß Anfänger keine Lehrsätze die etwas Anstrengung erfodern lernen dürfen. Deßwegen braucht er auch im Dreyecke BCG, nicht die Tangente, denn seine Liebhaber mathematischer Wissenschaften sollen Kenntniß der Tangenten nicht nöthig haben, sondern er macht die Quadrate von BG, und CG, und zieht aus derselben Summe die Wurzel = CB, und nun ist CB: BG = r: sin BCG.

Ich nehme freylich leicht in einer andern Bedeutung: wenn man in jedem Falle das Gesuchte leicht findet, ob man gleich zuvor Einiges das nicht ganz leicht war, hat lernen müssen. Den Gebrauch der Logarithmen zu lernen, wird gewiß Anfängern schwer, aber darnach fühlen sie doch daß es eine grosse Erleichterung ist mit Logarithmen zu rechnen. Hr. B. thut dieses selbst, nicht ganz seinem Begriffe vom Leichten gemäß, die Lehre von den Logarithmen ist gewiß schwerer als die von den Tangenten.

Es ist gut von einer Aufgabe mehr als eine Auflösung zu kennen, damit man nicht etwa die von denen man nichts gehört hat anstaunt. Auch ist manchmahl eine Auflösung in besondern Fäl-

len

len bequemer als die andere. Druckt man die Auflösungen wie in der Folge gewiesen wird durch Buchstabenrechnungen aus, so findet man auch immer für einerley Frage mehrerley Formeln, die zu unterschiednen Absichten; auch etwa Folgerungen aus ihnen herzuleiten, jede ihre eigne Bequemlichkeit haben. So sehe man von gegenwärtiger unten 20. Satz 1. Zus. imgl. I. astron. Abhandl.

16. S. Lehrs. Lehnsatz.

Wenn aus einem Punete A zwo gerade Linien einen Kreis in E; H; D, C, schneiden, so ist AC: AH = AE: AD (8. Fig.).

Bew. EDC + H = 2 R (G. 22. S. 8. Z.) also ADE = H; folglich ΔADE ∽ ΔAHC (G. 26. S.) woraus die Proportion fliesst.

Zus. Also AC. AD = AH. AE = ⌊AFq wenn AF die Tangente ist.

17. Satz. Aufgabe.

In dem Dreyecke ABC 8. F. aus allen drey Seiten die Winkel zu finden.

Man beschreibe mit der kleinsten Seite BC einen Kreis, der die andern in C, D; und E; H, schneide; so ist AH = AB + BC; AE = AB — BC; also vermittelst der Proportion des 16. S. AD und auch CD = AC — AD gegeben; Nun lasse man aus B ein Perpendikel auf AC welches DC halbirt, (G. 17. S.) so AG = AD

Digitized by Google

$= AD + \frac{1}{2} DC$ und $GC = \frac{1}{2} DC$ gegeben; und man findet in den rechtwinklichten Dreyeken ABG; CBG; die Winkel (3. S.).

Ex. $BC = 7$; $AB = 9$; $AC = 11$; also $AH = 9 + 7 = 16$; $AE = 9 - 7 = 2$; $11 : 2 = 16 : AD$ und $AD = \frac{32}{11}$; folglich $DC = 11 - \frac{32}{11} = \frac{121 - 32}{11} = \frac{89}{11}$, und $DG = GC = \frac{89}{22}$ und $AG = \frac{32}{11} + \frac{89}{22} = \frac{153}{22}$; also $lAG = l153 - l122$ ferner $AB : AG = r : \sin ABG$; also

$lr + lAG = 10,8422687$
$lAB = 0,9542425$
$l \sin ABG = 9,8880262$

giebt $ABG = 50° 35' 58''$; $A = 39° 24' 2''$

Eben so ist $lCG = l89 - l22$ und $CB : CG = r : \sin CBG$;

also $lr + lCG = 10,6069673.$
$lCB = 0,8450980$
$l \sin CBG = 9,7618693$

giebt $CBG = 35° 18' 16''$; $C = 54° 41' 44''$; folglich $ABG + GBC = 85° 54' 14'' = 2R - A - C$;

Anm. Daß im 3. 4. 5. 6. 8. S. alle Fragen, die von rechtwinklichten und gleichschenklichten Dreyecken vorkommen können, beantwortet sind, fällt in die Augen. Diese Sätze stecken in der That als besondere Fälle in den folgenden allgemeinen, es hat mir aber für Anfänger vortheilhaft geschienen, den Gebrauch der Tafeln, und die Beschaffenheit der Rechnungen an diesen leichten Exempeln zuerst zu zeigen. Daß übri-

Digitized by Google

übrigens auch alle Fälle, die bey ungleichseitigen Dreyecken vorkommen können, hie aufgelöset sind, erhellet so: Es sind

Gegeben	Gesucht
2 W. 1. S.	beyde S. 11. Satz.
2 S. 1. W. gegenüberst.	beyde W 12. Satz. dritte S. dessen Zus.
eingeschl.	beyde W. 15. S. dritte S. dessen Zus.
3. S.	die W. 16. S.

18. Satz. Aufgabe.

Vergleichung zwischen Halbmesser, Sehne, Winkel am Mittelpuncte, Ausschnitt und Abschnitt Geom. 95. Fig.

Aufl. I. Der Winkel am Mittelpuncte AEB heisse v; Halbmesser EA = a; Sehne AB = c; Perpendikel EF = h, der Sinustotus sey = 1. Wie man allsdann mit den Zahlen der Tafeln rechnet, lehrt nächstfolgende Vorerinnerung, bey der Anwendung der Buchstabenrechnung.

II. So ist $c = 2a. \sin \frac{1}{2} v$ wie im 8. S.

III. Wenn also von den drey Dingen: Halbmesser, Sehne, Winkel, zwey gegeben sind findet sich das dritte.

IIII. Auch $h = a. \cos \frac{1}{2} v = \frac{1}{2} c. \cot \frac{1}{2} v.$

V. Im Dreyecke

AEB; $c : a = \sin v : \cos \frac{1}{2} v$

AEF; $a : \frac{1}{2} c = 1 : \sin \frac{1}{2} v$

$1 : \frac{1}{2} = \sin v : \cos \frac{1}{2} v. \sin \frac{1}{2} v$

Folglich $\sin v = 2. \cos \frac{1}{2} v. \sin \frac{1}{2} v.$

VI.

Digitized by Google

VI. Das Dreyeck AEB = T ist
$= \frac{1}{2}$h. c $= \frac{1}{2}$a. cos $\frac{1}{2}$v. a. 2. sin $\frac{1}{2}$v (II; III)
$= \frac{1}{2}a^2$. sin v (V).

VII. Der Ausschnitt AEB = S (Geom. 13. Erkl.) ist $= \frac{1}{2}a^2$ v wenn man v in Decimaltheilen des Halbmessers ausdruckt (Geom. 44. S. 7. Zus.). Es muß nähmlich v so was seyn, wie a. a. O. in VII; $\frac{P.K}{180^\circ}$.

VIII. Der Abschnitt = V zwischen Sehne und Bogen AB; ist = Ausschnitt — Dreyeck (VI) $= \frac{1}{2}a^2$. (v — sin v).

IX. Im Exempel XI des 8. Zusatzes beym 44. S. der Geom.; wo a = 4 Fuß, v = 50°, ist (Man sehe den vorhin erwähnten 7. Z. VIII)

v	=	0,8726646 . . .
sin v	=	0,7660444
Unterschied	=	0,1066202
$\frac{1}{2}a^2$	=	8
Abschnitt	=	0,8529616

Quadratfuß.

Die Zahlen die ich dorten gebraucht habe, um die Rechnung so vorzustellen, wie man sie ohne Trigonometrie verstehen könnte habe ich so gefunden:

Die Sehne AB = 4 Fuß. 2 sin 25°
Höhe EF = 4 Fuß. cos 25°

Wenn man die Rechnung mit dem Sinus und Cosinus führt, werden Sehne und Höhe in

Digitized by Google

in Fuſſen ſo herauskommen wie ſie, im erwähnten 8. Zuſ. XI; angegeben ſind.

Das Product aus der Höhe in die halbe Sehne habe ich nicht ſelbſt durch Multiplication gefunden, ſondern daraus daß es $\frac{1}{2}$. 16. ſin 50° iſt.

X. Man hat v aus Tafeln, oder berechnet es auch leicht jedesmahl aus etlichen Bogen die man ein für allemahl berechnet hat z. E. den Geom. 44. S. befindlichen 90° und 45° dazu man nur etwa 1°; und 1′; 1″; berechnen dürfte.

Hat man alſo v, bis auf Zehnmilliontheilchen, ſo iſt v — ſin v allemahl ſo klein, daß man den Logarithmen davon mit ziemlicher Genauigkeit hat, und ſo V (VIII) bequem mit Logarithmen berechnet. Da ſich nun auch T mit Logarithmen findet (VI) ſo hätte man (VII) S = T + V.

XI. Exempel. Es ſey v = 60 Grad a = 70 Fuß, $\frac{1}{2}$ a² = $\frac{1}{2}$. 4900 = 2450

v = 1,0471975
ſin v = 0,8660254

v — ſin v = 0,1811721
log 0,181172 = 0,2580911 — 1
log 2450 = 3,3891661

log V = 2,6472572
log ſin v = 0,9375306 — 1
log 2450 = 3,3891661

log T = 3,3266967

V

V = 443, 87
T = 2121, 76
S = 2565, 63

Das Exempel steht in Penthers Geom. Pract. 603. §. Er sucht den Bogen nach der Verhältniß 22: 7 und findet

Ausschnitt = 2566 $\frac{24}{36}$
Dreyeck = 2135
Abschnitt = 431 $\frac{24}{36}$

Bey der Unrichtigkeit in Quadratfussen, war es sehr unnütze Arbeit den Bruch anzugeben.

Der Ausschnitt den Penth. zuerst berechnet, ist noch erträglich, so gut ihn erwähnte Verhältniß geben kann. Aber das Dreyeck ist sehr fehlerhaft, weil P. desselben Höhe = 61 setzt, sie ist aber 60, 621 wie folgende Rechnung nach (IIII) zeigt.

log cot 30° = 0, 2385606
log 35 = 1, 5440680
log h = 1, 7826286

Penth. hat ohne Zweifel die Höhe an einer Zeichnung gemessen, mit Trigonometrie gab er sich nicht gern ab, wie mir einer seiner vormahligen Schüler berichtet hat.

XII. Verlangt man den grössern Abschnitt, dessen Winkel am Mittelpuncte grösser als 180 Gr. so berechnet man den kleinern, und zieht ihn vom ganzen Kreise ab.

Digitized by Google

Aus Sehne und Höhe eines Bogens

XIII. Findet man (Geom. 31. S.) $2a = h + \frac{c^2}{4h}$; daraus v (II). Auch ist (Geom. 21. S.) $AIB = \frac{1}{2}.(360° - v)$ daher $AIF = 90° - \frac{1}{4}v$ und $\frac{IF}{AF} = \frac{2h}{c} = \text{tang } \frac{1}{4}v$.

Exempel. Bey einem Bogen über ein Fenster (Succow Baukunst 469. §.) ist $h = \frac{1}{4}c$; daher $2a = \frac{5}{4}c$, tang $\frac{1}{4}v = 0,5$;
Durch Proportionaltheile findet sich $\frac{1}{4}v = 26° 33' 54''$; $v = 106° 15' 36''$.

Eine falsche Regel für diese Aufgabe steht beym Columella de re rustica Lib. V. cap. 2. n. 9.

1. Zus. In einem gegebenen Kreise, einen gegebenen Bogen abzuschneiden, hat man dessen Sehne $= 2a$. sin $\frac{1}{2}v$ welches schon im 9. S. 3. Z. vorkam. Ist in v eine ungerade Zahl von Minuten, oder gar eine Zahl von Secunden so müsste man Tafeln haben welche die Winkel in kleinen Theilen von Minuten angeben, oder Proportionaltheile brauchen.

Wenn man den Bogen aus zween zusammensetzen kann, da sich der grössere leicht durch geometrische Verzeichnung giebt, z. E. 60 Gr; 30 Gr. so berechne man nur des kleinern Sehne.

Gebrauch hievon bey Abtheilung grosser Quadranten, in meiner Astron. Abh. II. Samml. 184. u. f. Seiten.

2. Zus.

Digitized by Google

2. Zuf. Umgekehrt, weiß man die Sehne c dem Bogen v gehörig, so giebt c: 2. sin $\frac{1}{2}$ v den Halbmesser $= \frac{1}{2}$ c. cosec $\frac{1}{2}$ v.

Am leichtesten und sichersten wenn der Bogen 60 Gr. ist. Zuweilen aber verlangt man z. E. eines grossen abgetheilten Quadranten Halbmesser zu wissen, und besitzt keinen Maaßstab von der Grösse. Da kann man von der Sehne eines kleinern Bogens auf den Halbmesser schliessen, mit der Vorsichtigkeit welche diese Art zu schliessen erfodert.

Von ordentlichen Vielecken.

3. Zuf. Ist c die Seite eines solchen Vielecks, so ist v ein Bogen der den Umfang misst, und man hat aus II; IIII; Seite des Vielecks und Höhe des Dreyecks (Geom. 23. S.), auch wenn die Seite gegeben ist, den Halbmesser (2. Zuf.). So ein gegebenes Vieleck, im gegebenen Kreise, oder über gegebene Seite zu beschreiben, genauere Methoden als die blos mechanische a. a. O.

So wäre für das Neuneck, v = 40 Gr. und 2. sin 20° = 0, 6840404; cos 20° = 0, 9396926; welche Grössen man mit dem angenommenen Halbmesser multipliciren muß um Seite des Neunecks, und Höhe des Dreyecks das sein neunter Theil ist zu haben.

Weil $\frac{1}{2}$ cosec 20 Gr. = 1, 4619022 so giebt dieses mit der gegebenen Seite multiplicirt,

Digitized by Google

den Halbmesser des Kreises, in welchen sich ein Neuneck das diese Seite hat, beschreiben lässt.

Selbst die Höhe könnte man als gegeben annehmen, und aus ihr Halbmesser und Seite berechnen (IIII).

Eine Polygontafel, vom Dreyeck bis zum 20 Eck wo jede dieser drey Linien als gegeben angenommen ist, und die andern aus ihr bestimmt sind giebt Hübsch in seinen Anfangsgr. der Trigonometrie.

Ist die gegebene Linie nicht gerade 100 oder 1000 u. s. w. so wäre es doch wohl bequemer beständige Logarithmen zu brauchen.

Z. E. Für das Neuneck, $\log 2 + \log \sin 20^\circ = 0,8350817 - 1$, den man jedesmahl zu log a addirte, log c zu haben u. s. w.

Für eine Figur von viel Seiten wäre es beschwerlich eine Seite oft herumzutragen. Man könnte also etwa auch die Sehnen von 2v; 3v; berechnen sich die Arbeit leichter, selbst vor Anhäufung von Fehlern beym Herumtragen der Sehnen sicherer zu machen.

Lässt sich die Zahl der Seiten in Factoren zerfällen, so braucht man ohnedem diesen Vortheil, beschreibt z. E. das Dreyeck, und trägt des Neunecks Seite dreymahl in jeden seiner Bogen.

4. Zus. Die Fläche q, eines ordentlichen Vielecks von n Seiten, ist (VI) $= a^2 . \frac{1}{2} . n . \sin v$.

Für

Für $n = 9$ käme die Zahl mit welcher man des Halbmessers Quadrat multipliciren müsste $= 9 . \frac{1}{2} . \sin 40^\circ = 2,8925442$, welches des Neunecks Fläche bis auf Zehnmilliontheilchen des Quadrats des Halbmessers gäbe. Wem das noch nicht scharf genug wäre der könnte $\sin 40^\circ$ aus der Trig. Brit. (2. S. 1. A.) nehmen, und fände die Zahl 2,892544243 5894255. Man kann also durch die vorhandenen Hülfsmittel die Rechnungen viel schärfer führen als zu irgend einem Gebrauche verlangt wird.

5. Zus. In eben dem Kreise sey ein Vieleck von N Seiten beschrieben, dessen Winkel am Mittelpuncte $= V$, Fläche $= Q$; So ist $q : Q = n . \sin v : N . \sin V$.

Exempel; Das erste Vieleck sey ein Quadrat, das zweyte ein Zwölfeck,

n	N	v	V
4	12	90	30

$q : Q = 4 . 1 : 12 . \frac{1}{2} = 2 : 3$ oder: das Quadrat ist $\frac{2}{3}$ des Zwölfecks.

Es sey $N = 2n$; Also $v = 2V$; $\sin v = 2 . \sin V . \cos V$, so ist

$$q : Q = \cos V : 1$$

Ex. $N = 12$; $n = 6$; also $V = 60$; $v = 120$; $q : Q = \frac{1}{2} : 1$ oder: das Dreyeck ist die Hälfte des Sechsecks.

Je grösser $2n$ ist, desto mehr nähern sich einander die Flächen der Vielecke von n und $2n$ Seiten, weil allsdann V immer kleiner wird.

Digitized by Google

Man kann mehr solche Vergleichungen zwischen Flächen ordentlicher Vielecke anstellen, nur werden sie nicht so einfach, wenn die Sinus mehr verwickelte Ausdrückungen erfodern.

Anwendung der Trigonometrie auf die practische Geometrie.

Es erhellet leicht, daß alle Arbeiten, bey denen es auf Dreyecke ankömmt, sich nach den bisherigen Vorschriften verrichten lassen; wenn man nur das durch Rechnung suchet, was die vorhergehende Geometrie durch Zeichnung bestimmen lehrte. Ein Exempel wird solches erläutern. Die gesuchte Weite G. 38. S. III. Fall 89. Fig. zu berechnen, verfährt man so:

I. Im Dreyecke ACD suche man aus den beyden Winkeln ACD, ADC und der Seite CD die Seite DA; (11. S.).

II. Eben so DB im Dreyecke BDC; aus BDC; BCD; DC;

III. Im Dreyecke DAB; die übrigen Winkel aus DA; DB; und ADB (15. S.).

IIII. Eben in demselben; aus den gefundenen Seiten und Winkeln die Seite AB. (15. S. Zus.).

Anwen-

Digitized by Google

Anwendung der Buchstabenrechnung, allgemeine trigonometrische Lehrsätze zu finden.

Vorerinnerung.

Von der Bezeichnung der trigonometrischen Linien, den Halbmesser = 1 gesetzt.

1. In der 3. Fig. heisse der Winkel ACD = x. Es sey Cd = r; so ist de des Winkels Sinus für diesen Sinustotus.

Man nenne CD = 1; So ist DE eben des Winkels Sinus, für den Sinustotus = 1.

2. Man verstehe unter sin x, den Sinus des Winkels, welcher für den Sinustotus = 1 gehört, und den Sinus welcher für den Sinustotus r gehört, bezeichne man mit sin tab x weil in den Tafeln ein anderer Halbmesser als 1 genommen ist, und r diesen bedeuten kann. So ist

$$\frac{\text{sin tab x}}{r} = \text{sin x oder sin tab x} = r.\ \text{sin x.}$$

3. Der Sinus für den Halbmesser 1 kömmt also heraus, wenn man den für den Halbmesser r mit r dividirt.

Und umgekehrt, wenn man den Halbmesser 1 mit r multiplicirt, hat man den für den Halbmesser r.

4. Will man einen Sinus der Tafeln wo r = 10 000 000 in den für den Halbmesser = 1

Digitized by Google

verwandeln, so sieht man ihn nur als Zehnmillliontheilchen an.

So ist für den Halbmesser 1;

$$\sin 1' = 0,0002909$$

5. Von dem Logarithmen der in den Tafeln einem Sinus zugehört, muß man 10 abziehn um den Logarithmen zu haben, welcher dieses Winkels Sinus für den Halbmesser 1; gehört

$$\log \text{tab} \sin 1' = 6,4637261$$
$$\text{abgezogen} \qquad 10,$$
$$\log \sin 1' = -3,5362739$$

6. So kömmt jedes Sinus Logarithme verneint. Man erspart sich die Mühe dieses Verneinte zu berechnen, wenn man den Abzug nur folgendergestalt andeutet.

$$\log \sin 1' = 6,4637261 - 10$$
$$= 0,4637261 - 4$$

7. Alles beygebrachte, gilt offenbahr auch so vom Cosinus.

8. Man verstehe auf eben die Art allemahl den Sinustotus = 1; wenn man tang x; sec x; cot x; cosec x nennt.

So ist jede dieser Grössen, das was heraus kömmt wenn man die welche eben dem Winkel für den Sinustotus r zugehört mit r dividirt.

9. So ist im rechtwinklichten Dreyecke CDE 2. Fig. den Winkel ECD = y genannt;

DE

$\frac{DE}{CD} = \text{sin } y$; $DE = CD.\ \text{sin } y$

$\frac{CE}{CD} = \text{cos } y$; $CE = CD.\ \text{cos } y$.

$\frac{DE}{CE} = \text{tang } y$; $DE = CE.\ \text{tang } y$

$\frac{CD}{CE} = \text{sec } y$; $CD = CE.\ \text{sec } y$

10. Man sieht leicht, daß man die 1 die hie den Sinustotus bedeutet, sich bald als ein Quadrat, bald als eine höhere Potenz vorstellen muß, ohngefähr wie 1 bald einen Längenfuß, bald einen Quadratfuß, bald einen Cubikfuß bedeutet.

11. So ist $(\text{cos tab } x)^2 = r^2 - (\text{sin tab } x)^2$

Und wenn man statt dessen schreibt

$(\text{cos } x)^2 = 1 - (\text{sin } x)^2$

So stellt man sich natürlicher Weise diese 1 als ein Quadrat vor.

12. Eben so ist $\text{cot tab } y = \frac{r^2}{\text{tang tab } y}$;

In dem Ausdrucke $\text{cot } y = \frac{1}{\text{tang } y}$ bedeutet also die 1 ein Quadrat.

13. Auch so in $\text{sec } y = \frac{1}{\text{cos } y}$.

14. Man darf nähmlich nur bemerken, daß eines Winkels Sinus, Tangente, u. s. w. Linien sind, wie der Halbmesser eine ist. Setzt

Digitized by Google

man ihn also = 1 so muß man sich das Quadrat dieser 1 vorstellen, wo des Halbmessers Quadrat vorkäme.

15. Hieraus erhellt auch, wie man sich wegen der Logarithmen verhält.

Von dem Tafellogarithmen einer Tangente oder Secante muß man 10 abziehen, um den Logarithmen der Tangente oder Secante zu haben welche für den Sinustotus 1, eben dem Winkel zugehört.

16. Dieser Abzug läßt bey jeder Secante etwas Bejahtes übrig, und auch bey jeder Tangente deren Winkel über 45 Grad ist. Bey jedem dieser Logarithmen, darf man nur von den Kennzifern; 10 abziehn.

17. Für Tangenten unter 45 Grad kann man sich verhalten wie in (6).

19. Satz. Aufgabe.

Für den Halbmesser CA = r; sind 9 Fig.

der Bogen	AB	BD	AD
Sinus	BE = m	DG = d	DF = s
Cosinus	CE = μ	CG = δ	CF = σ

So ist; BD der Unterschied der Bogen AD; AB; und AD die Summe der Bogen AB, BD.

Man sucht I) den Sinus des Unterschiedes; DG aus den Sinussen der beyden Bogen AD; AB.

II. Den Sinus der Summe; DF; aus den Sinussen der beyden Bogen AB; BD.

Aufl.

Digitized by Google

Aufl. Zum Anfange nehme ich aus der Figur an, daß jeder Bogen, auch bey der Summe unter 90 Grad ist. Die Untersuchung wäre schon nützlich genug, wenn sie sich auch in der That nur darauf einschränkte. In der Folge aber wird sich zeigen wie das, was man herausbringt auch auf Winkel über 90 Grad anzuwenden ist.

Nun: Für I.

Unmittelbar gegeben sind hie, der Halbmesser; BE; CE; DF; CF. Gesucht wird; DG.

Die Dreyecke CBE; CIF; DIG; sind ähnlich.

Also CI: CF = DI: DG

und CI: CF = CB: CE

daher CB: CE = DI: DG

In dieser letzten Proportion, sind die beyden letzten Glieder unbekannt. Das dritte aber findet man so: Es ist DI = DF — IF; Aber CE: EB = CF: IF; Also hat man IF; folglich auch DI.

Nun brauche man die Buchstaben, die zur Rechnung bequemer sind.

Also $\frac{CF.\ EB}{CE}$ oder $IF = \frac{\sigma . m}{\mu}$

$DI = s - \frac{m\sigma}{\mu}$

$\frac{DI.\ CE}{CB}$ oder $DG = (s - \frac{m\sigma}{\mu}) . \frac{\mu}{r}$

$= \frac{\mu s}{r} - \frac{m\sigma}{r}$

Also DG oder $d = \frac{\mu s - m\sigma}{r}$ Die

Die Regel lieſſe ſich mit Worten ſo ausdrukken: Man multiplicire des gröſſern Bogens Sinus mit des kleinern Coſinus; und auch des kleinern Sinus, mit des gröſſern Coſinus. Das letzte Product ziehe man von dem erſten ab, und dividire die Differenz durch den Halbmeſſer, der Quotient iſt der Sinus des Unterſchiedes beyder Bogen.

Wenn die Bogen unter 90 Grade ſind, ſo iſt des groſſen Bogen Sinus gröſſer als des kleinen ſeiner, der Coſinus aber kleiner. Folglich das letzte Product kleiner als das erſte. So merkt man leicht, welches man abziehen ſoll.

Für II. Sind nebſt dem Halbmeſſer gegeben BE; CE; DG; CG, geſucht DF.

Dieſe Gröſſe beſteht aus zwey Stücken DI; IF; welche man einzeln zu ſuchen und denn zuſammen zu addiren hat.

Nun iſt DG: DI = CF: CI = CE: CB; Alſo CE: CB = DG: DI; So iſt DI gegeben.

Eben ſo DG: GI = CF: FI = CE: EB oder CE: EB = DG: GI.. So iſt GI gegeben.

Alſo auch CI = CG — GI.

Alſo auch das letzte Glied der Proportion CB: BE = CI: IF.

In den Buchſtaben heiſſt $DI = \frac{r.d}{\mu}$;

GI

Digitized by Google

$GI = \frac{md}{\mu}$; $CI = \delta - \frac{md}{\mu}$;

$\frac{CI.\ BE}{CB}$ oder $IF = (\delta - \frac{md}{\mu}) \cdot \frac{m}{r}$

$DI + IF = \frac{rd}{\mu} + \frac{m\delta}{r} - \frac{mmd}{r\mu}$

Weil $\frac{rd}{\mu} = \frac{rrd}{r\mu}$; so hat man

$\frac{rd}{\mu} - \frac{mmd}{r\mu} = \frac{(rr-mm)\,d}{r\mu} = \frac{\mu\mu d}{r\mu} = \frac{\mu d}{r}$

Folglich $DI + IF$ oder $s = \frac{m\delta + \mu d}{r}$

Das heisst: Man multiplicire jedes Bogens Sinus, durch des andern Cosinus; die Producte addire man, und dividire diese Summe durch den Halbmesser. Der Quotient ist der Sinus der Summe. Diese Sätze, in solchen Zeichen auszudrucken, wie in den Vorerinnerungen erklärt sind, nenne man, $ACB = \alpha$; $BCD = \beta$, $ACD = \gamma$; so ist $m = r.\ \sin\alpha$; $\mu = r.\ \cos\alpha$ u. s. w. Also

I) $\sin\beta$ oder $\sin(\gamma - \alpha) = \sin\gamma\cos\alpha - \cos\gamma.\sin\alpha$

II) $\sin\gamma$ oder $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta$

1. Zus. Für den Cosinus des Unterschiedes zweener Bogen, ist

$\cos(\gamma - \alpha) = \cos\alpha.\cos\gamma + \sin\alpha.\sin\gamma$

denn für den Halbmesser CD ist des Unterschiedes $AD - AB = BD$; Cosinus $= CG = CI + IG$.

Nun

Digitized by Google

Nun ist CE : CB = CF : CI; also CI = $\frac{r.\sigma}{\mu}$.

Im Satze selbst I. hatte man DI

Die Proportion CB : BE = DI : IG giebt also

$$IG = (s - \frac{m\sigma}{\mu}).\frac{m}{r} = \frac{ms}{r} - \frac{m^2\sigma}{r\mu}$$

Also $$CG = \frac{r\sigma}{\mu} + \frac{ms}{r} - \frac{m^2\sigma}{r\mu}$$

Nun ist der erste Theil dieses Werthes, = $\frac{r^2\sigma}{r\mu}$ und giebt also mit dem letzten zusammen gerechnet $\frac{(r^2 - m^2)\sigma}{r\mu}$; davon ist der Zähler $= \mu^2\sigma$ also ist dieser Bruch $= \frac{\mu\sigma}{r}$.

Und so kömmt CG oder $\delta = \frac{\mu\sigma + ms}{r}$

Ich habe den Beweis aus Betrachtung der Figur herleiten wollen. Will man den Cosinus nach 3. Erkl. 1. Zus. aus dem Sinus berechnen, so kann man sich so verhalten: Ich setze der Kürze wegen r = 1 behalte aber die Zeichen die ich für die Sinus gebraucht habe. Das Quadrat des Halbmessers, kann man durch die Summe der Quadrate ein paar zusammengehörigen Sinus und Cosinus ausdrucken, also hat man

1 =

Digitized by Google

$$\begin{array}{rl} 1 = & s^2 \qquad + \sigma^2 \\ \text{abgezog. } d^2 = & \mu^2 s^2 - 2m\mu s\sigma + m^2\sigma^2 \\ \hline \delta^2 = & (1-\mu^2)s^2 + 2m\mu s\sigma + (1-m^2).a^2 \\ = & m^2 s^2 + 2m\mu s\sigma + m^2\sigma^2 \\ = & (ms + \mu\sigma)^2 \end{array}$$

2. Z. Der Cosinus der Summe zweener Bogen, ist $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta$. In der Figur ist CF der Cosinus der Summe (AB + BD). Man hat aber im Satze II; CI gefunden; Also giebt die Proportion CB : CE = CI : CF sogleich $CF = \frac{\mu}{r}.\left(\delta - \frac{md}{\mu}\right) = \frac{\mu\delta - md}{r}$

Will man diesen Cosinus eben wie vorigen, durch Abziehung seines Quadrats vom Quadrate des Halbmessers finden, so verfährt man folgendergestalt:

$$\begin{array}{rl} 1 = & \delta^2 \qquad + d^2 \\ \text{abgezogen } s^2 = & m^2\delta^2 + 2m\mu d\delta + \mu^2 d^2 \\ \hline \sigma^2 = & \mu^2\delta^2 - 2m\mu d\delta + m^2 d^2 \end{array}$$

Das kann nun das Quadrat von

$\mu\delta - md$ oder von $md - \mu\delta$ seyn;

Von diesen beyden Wurzeln des gefundenen Quadrats, muß eine bejaht, die andere verneint seyn, denn die eine kömmt allemahl heraus, wenn man der andern Theile mit entgegengesetzten Zeichen nimmt.

Weil man hie voraussetzt, jeder der beyden Bogen sey unter 90 Graden, und so auch ihre Sum-

Digitized by Google

Summe; so sind alle Sinus und Cosinus die in der Rechnung vorkommen bejaht.

Daher muß man von den beyden Wurzeln die nehmen welche unter den gemachten Voraussetzungen bejaht ist.

Wenn nun beyder Bogen Summe unter 90 Gr. ist so ist jedes Bogens Cosinus grösser als des andern Sinus. Denn wäre des einen Bogens Cosinus so groß als des andern Sinus, so machte jener Bogen mit diesen 90 Grad. Wäre aber des einen Bogens Cosinus kleiner als des andern Sinus, so fehlte dem ersten zu 90 Graden nicht so viel als der andere beträgt, und beyde zusammen machten also mehr als 90 Grad.

Solchergestalt ist das Product aus beyden Cosinussen, grösser als das aus beyden Sinussen.

Und daher der bejahte Werth für

$$\sigma = \frac{\mu\delta - md}{r}$$

Exempel. Es sey $AB = 45°$; $BD = 30°$ also $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\alpha$; $\sin\beta = \frac{1}{2}$; $\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (2; 3; Erkl.). Hieraus findet man den Sinus der Summe; aus dem Satze II.

$$\sin 75° = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}\cdot(1+\sqrt{3})}{4}$$

den

Den Cosinus der Summe, aus 2. Zus.

$$\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{2}.\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}.(\sqrt{3}-1)}{4}$$

Welches also sin 15° giebt.

Das Uebrige erfodert nichts weiter als Decimalrechnung. Folgendes ist die wirkliche Berechnung des Sinus

$1+\sqrt{3} = 2,73205080$

$\sqrt{2} = 1,41421356$ mult. nach Ar. III; 13

2,73205080	
1 09282032	
2732050	
1092820	
54641	
2732	
819	
135	
16	
3,8637032	div. mit 4 giebt
0,9659258	

Den Sinus von 75 Graden für den Halbmesser $= 1$; dieses also mit Zehnmillionen multiplicirt, giebt den Sinus, vollkommen wie in den Tafeln.

Aus der Decimalrechnung ist bekannt daß die letzten Zifern unrichtig werden. Daher waren hie die beyden Factoren bis auf acht Decimalstellen angenommen, um das Product bis auf sieben zu haben.

Digitized by Google

Anmerkungen über die Anwendung der Formeln, wenn Winkel über 90 Grad vorkommen.

I. Wie diese Formeln aus der Voraussetzung gefunden worden, daß alles Winkel unter 90 Graden sind, so wendet man sie leicht auf Fälle an wo diese Voraussetzung nicht statt findet, wenn man sich nur aus den Erklärungen der trigonometrischen Linien erinnert, wie unter solchen Umständen diese Linien verneint werden.

II. Man kann ein paar Bogen jeden unter 90 Grad so annehmen, daß ihre Summe doch über 90 Gr. beträgt.

Wer sich hiezu eine Figur wie die 9 *entwirft*, wird sehn, daß allsdenn CF auf die Seite fällt, welche der auf welche CE fällt entgegengesetzt ist. Das heisst, wie bey den Erklärungen ist erinnert worden, der Cosinus der Summe wird verneint.

Und die Formel des 2. Zus. würde dieses dadurch anzeigen, daß das was man abziehen soll, mehr betrüge als das wovon man es abziehen soll.

So ist nach dieser Formel

$$\cos(60^\circ + 45^\circ) = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot(1-\sqrt{3}) = -\cos 75^\circ$$

wie gehörig, weil $60 + 45 = 105 = 180 - 75$.

III. Wenn jemanden einfiele in der Formel für den Sinus des Unterschiedes, den Bogen den man abzieht für den grösten anzunehmen,

so

so würde er diesen Sinus auch so finden, wie der Sinus eines verneinten Bogens seyn muß.

IIII. Nähme man von ein Paar Bogen die zusammen addirt werden sollen, einen zwischen 90 und 180 Gr. an, so müsste man seinen Cosinus verneint setzen.

Wollte man den Sinus der Summe von 45 und 120 Gr. berechnen, so setzte man $\sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ aber $\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$; Also $\sin (45^\circ + 120^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 75^\circ$ wie gehörig.

V. So wendet man diese Formeln, auf Bogen so groß als man will, selbst grösser als der einfache Umfang des Kreises an, wozu nur die trigonometrischen Linien nach Erfodern bejaht oder verneint zu nehmen sind. Wer sich für jeden dieser Fälle eine eigne Figur entwerfen, und die vorhin gebrauchten Schlüsse auf solche anwenden will, findet allemahl eben die Regel welche dieses Verfahren giebt.

Einige solche Figuren zu entwerfen ist eine dienliche Uebung für den Anfänger, aber das jedesmahl vorzunehmen, wäre unendliche Arbeit.

VI. Was von den Sinussen gesagt ist, wendet man leicht auf die Tangenten u. s. w. an, die in der Folge vorkommen.

Digitized by Google

3. Zuſ. Die Tangente der Summe zweener Winkel iſt $\text{tang}(\alpha+\beta) = \frac{\text{tang}\,\alpha + \text{tang}\,\beta}{1 - \text{tang}\,\alpha.\,\text{tang}\,\beta}$

Denn: $\text{tang}(\alpha+\beta) = \frac{\text{ſin}\,(\alpha+\beta)}{\text{coſ}\,(\alpha+\beta)}$

$= \frac{\text{ſin}\,\alpha.\,\text{coſ}\,\beta + \text{coſ}\,\alpha.\,\text{ſin}\,\beta}{\text{coſ}\,\alpha.\,\text{coſ}\,\beta - \text{ſin}\,\alpha.\,\text{ſin}\,\beta}$

Man dividire hie Zähler und Nenner mit $\text{coſ}\,\alpha.\,\text{coſ}\,\beta$; ſo wird

aus dem Zähler $\frac{\text{ſin}\,\alpha}{\text{coſ}\,\alpha} + \frac{\text{ſin}\,\beta}{\text{coſ}\,\beta}$

oder $\text{tang}\,\alpha + \text{tang}\,\beta$

aus dem Nenner $1 - \frac{\text{ſin}\,\alpha}{\text{coſ}\,\alpha}.\frac{\text{ſin}\,\beta}{\text{coſ}\,\beta}$

oder $1 - \text{tang}\,\alpha.\,\text{tang}\,\beta$

4. Zuſ. Die Tangente des Unterſchiedes zweener Winkel iſt $\text{tang}(\gamma-\alpha) = \frac{\text{tang}\,\gamma - \text{tang}\,\alpha}{1 + \text{tang}\,\gamma.\,\text{tang}\,\alpha}$

Denn ſie iſt $\frac{\text{ſin}\,(\gamma-\alpha)}{\text{coſ}\,(\gamma-\alpha)}$

$= \frac{\text{ſin}\,\gamma.\,\text{coſ}\,\alpha - \text{coſ}\,\gamma.\,\text{ſin}\,\alpha}{\text{coſ}\,\gamma.\,\text{coſ}\,\alpha + \text{ſin}\,\gamma.\,\text{ſin}\,\alpha}$

Wenn man hie Zähler und Nenner mit $\text{coſ}\,\gamma.\,\text{coſ}\,\alpha$ dividirt, bekömmt man den angegebenen Ausdruck.

Exemp. Für die Tangente von $(45° + 30°)$ iſt $\text{tang}\,\alpha = 1$; $\text{tang}\,\beta = \frac{\text{ſin}\,30°}{\text{coſ}\,30°} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$=$

Digitized by Google

$= \frac{\sqrt{3}}{3}$ welcher Ausdruck bequemer ist, weil es leichter ist, eine Irrationalzahl die man in viel Ziffern berechnet hat, mit einer Rationalzahl zu dividiren, als eine Rationalzahl mit der Irrationalzahl zu dividiren.

So giebt der 3. Zusatz

$$\text{tang } 75° = \frac{1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}}{1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}$$

Um hie die Irrationalgrösse aus dem Nenner wegzubringen, multiplicire man Zähler und Nenner mit $3 + \sqrt{3}$. So wird der Nenner $= 9 - 3$ (Arithm. II. C. 3. §. III. Ex.) $= 6$; der Zähler wird $9 + 6\sqrt{3} + 3 = 12 + 6\sqrt{3}$. Also kömmt $\text{tang } 75° = 2 + \sqrt{3} = 3{,}7320508$. Dieses, mit Zehnmillionen multiplicirt, giebt die Tangente der Tafeln.

Eben so ist tang $(45° - 30°)$ oder

$$\text{tang } 15° = \frac{1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}}{1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}$$

$$= \frac{(3 - \sqrt{3})^2}{9 - 3} = 2 - \sqrt{3} = 0{,}2679491$$

Im Vorbeygehn erhellt daß $\cot 30° = \text{tang } 60° = \sqrt{3}$.

5. Zus. Aus des einfachen Bogens φ, Sinus und Cosinus, finden sich des doppelten Bogens seine so:

Digitized by Google

$$\sin 2\varphi = 2.\ \sin\varphi.\ \cos\varphi$$
$$\cos 2\varphi = \cos\varphi^2 - \sin\varphi^2$$
$$= 1 - 2\sin\varphi^2$$
$$= 2.\cos\varphi^2 - 1$$

Dieses erhellt, wenn man im Satze II. und im 2. Zusatze $\alpha = \beta = \varphi$ setzt.

6. Zus. Imgleichen, für die Tangente des doppelten Bogens $\tan 2\varphi = \frac{2\tan\varphi}{1 - \tan\varphi^2}$

Aus dem 3. Zus.

So ist $\tan(2.30°)$ oder $\tan 60° = \frac{\frac{2}{3}\sqrt{3}}{1 - \frac{1}{3}}$ $= \sqrt{3}$

Und $\tan(2.60°)$ oder $\tan 120° = \frac{2\sqrt{3}}{1-3}$ $= -\sqrt{3} = -\tan 60°$ wie gehörig (4. Erkl. 1. Zus.).

7. Zus. Aus dem doppelten Bogen den einfachen zu finden $\sin\varphi = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\varphi}{2}}$

Denn aus dem 5. Zus. hat man

$$2\sin\varphi^2 = 1 - \cos 2\varphi$$

wo man also nur mit 2 dividiren, und die Wurzel ausziehen darf.

8. Zus. Wenn man den doppelten Bogen als einen ganzen ansieht, so wird der einfache ein halber. Und so heisst der 7. Zus.

Man ziehe eines Bogens Cosinus von 1 ab; halbire den Rest, und ziehe daraus die Quadratwur-

Digitized by Google

wurzel; so hat man den Sinus des halben Bogens.

Oder: Eines Bogens Quersinns, halbirt, und aus dieser Hälfte die Quadratwurzel gezogen, giebt den Sinus des halben Bogens.

Der ganze Bogen sey = 30° so ist

$$\sin 15° = \sqrt{(\tfrac{1}{2}\cdot(1-\tfrac{\sqrt{3}}{2}))} = \sqrt{(\tfrac{1}{4}\cdot(2-\sqrt{3}))}$$
$$= \tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{(2-\sqrt{3})}.$$

9. Zus. Für den Cosinus des einfachen, oder des halben, aus dem Cosinus des doppelten, oder des ganzen; $\cos\varphi = \sqrt{\frac{1+\cos 2\varphi}{2}}$.

Folgt eben so, aus $1+\cos 2\varphi = 2\cos\varphi^2$ im 5. Zus.

10. Zus. Für die Tangente des einfachen, oder des halben Bogens

$$\tang\varphi = \sqrt{(\frac{1-\cos 2\varphi}{1+\cos 2\varphi})}$$
$$= \frac{\tang 2\varphi}{\sec 2\varphi + 1}$$
$$= \frac{\sec 2\varphi - 1}{\tang 2\varphi}$$

Die erste dieser drey Ausdrückungen, folgt aus 8; 9. Zus. Nähmlich des Bogens φ Tangente findet sich, wenn man des Bogens Sinus mit dem Cosinus dividirt. Ihr Quadrat ist also

so aus diesen beyden Zusätzen $\frac{1-\cos 2\varphi}{2}$, $\frac{2}{1+\cos 2\varphi}$.

Nun findet sich eines Bogens Secante, wenn man 1 mit dem Cosinus dividirt.

Also ist $1-\cos 2\varphi = 1 - \frac{1}{\sec 2\varphi} = \frac{\sec 2\varphi - 1}{\sec 2\varphi}$; und $1+\cos 2\varphi = \frac{\sec 2\varphi + 1}{\sec 2\varphi}$

So wird nun das Quadrat der Tangente

$$\frac{\sec 2\varphi - 1}{\sec 2\varphi + 1}$$

Hie multiplicire man Zähler und Nenner mit $\sec 2\varphi + 1$; so bekömmt man

$$\frac{(\tang 2\varphi)^2}{(\sec 2\varphi + 1)^2}$$

Multiplicirt man Zähler und Nenner mit $\sec 2\varphi - 1$ so bekömmt man

$$\frac{(\sec 2\varphi - 1)^2}{(\tang 2\varphi)^2}$$

11. Zus. Aus dem Satze selbst ist

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta$
$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha.\cos\beta - \cos\alpha.\sin\beta$

Summe $= 2.\sin\alpha.\cos\beta$
Unterschied $= 2.\cos\alpha.\sin\beta$

12. Zus.

Digitized by Google

12. Zuſ. Auch, aus 1; 2. Zuſ.

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha . \cos\beta + \sin\alpha . \sin\beta$
$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha . \cos\beta - \sin\alpha . \sin\beta$

Summe $= 2 . \cos\alpha . \cos\beta$
Unterſchied $= 2 . \sin\alpha . \sin\beta$

Dieſe beyden Sätze zeigen, wie man Summen und Unterſchiede von Sinuſſen oder Coſinuſſen, in Producte verwandelt; und umgekehrt, Producte in Summen oder Unterſchiede.

Ein Gebrauch hievon den man gleich überſieht, iſt daß ſich ſo die Logarithmen bequem anbringen laſſen. Wenn man z. E. den Logarithmen der Summe beyder Coſinuſſe von Summe und Differenz verlangt, ſo darf man nur die Logarithmen der Coſinuſſe beyder Bogen zum Logarithmen der 2 addiren. Addirte man aber die Coſinuſſe der Summe und der Differenz ſelbſt, und verlangte nun den Logarithmen deſſen was dieſe Addition giebt, ſo fände man auch aus gröſſern Tafeln, ihn nur etwa für die höchſten fünf Zifern, wenn man nicht Proportionaltheile brauchte.

20. Satz.

Die Vergleichung zwiſchen den Seiten des Dreyecks 5. Fig. und einem ſeiner Winkel zu finden.

1. Ich nenne wie bisher, den Halbmeſſer 1; die Winkel, jeden mit dem groſſen Buchſtaben

Digitized by Google

der an seiner Spitze steht, die Seiten, jede mit dem kleinen Buchstaben des Winkels der ihr gegenübersteht. Also $BC = a$; $AC = b$; $AB = c$. Dieß Verfahren, welches Hr. Euler braucht, giebt die Bequemlichkeit, daß man, auch ohne die Augen auf die Figur zu richten, das Verhalten zwischen Seiten und Winkeln gleich aus den Formeln bequem übersieht.

2. So hat man $\sin B = \frac{b \cdot \sin A}{a}$; $\sin C = \frac{c \cdot \sin A}{a}$ (10. Satz).

3. Ferner weil ein Winkel mit den beyden andern 180 Grad macht

$\sin C = \sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B$ (19. S.).

4. Wenn man in (3) die Sinusse nach (2) ausdruckt, so bekömmt man eine Gleichung in der man jedes Glied mit $\sin A$ dividiren kann. Wenn man ferner jedes Glied mit a multiplicirt, so kömmt

$$c = a \cdot \cos B + b \cdot \cos A.$$

5. Dieser Satz ist schon merkwürdig. Er heisst so: Man multiplicire von zwo Seiten eines Dreyecks jede mit dem Cosinus des Winkels der an ihr anliegt, aber nicht dessen den beyde Seiten einschliessen; die Summe dieser Producte giebt die dritte Seite.

6. Aus (4) folgt $c - b \cdot \cos A = a \cdot \cos B$; und quadrirt

$c^2 -$

Digitized by Google

$c^2 - 2bc.\cos A + b^2.\cos A^2 = a^2.\left(1 - \frac{\sin A^2.b^2}{a^2}\right)$

wenn man rechter Hand, cos B durch seinen Sinus, und diesen ferner nach 3 ausdruckt.

7. Was also rechter Hand steht ist $a^2 - b^2.\sin A^2$.

8. Der letzte Theil linker Hand, ist
$b^2\,(1 - \sin A^2) = b^2 - b^2.\sin A^2$.

9. Wenn man also $b^2.\sin A^2$ auf beyden Seiten addirt, so kömmt in (6)
$c^2 - 2\,bc.\cos A + b^2 = a^2$.

10. Oder $b^2 + c^2 - a^2 = 2\,bc.\cos A$
Das ist $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc} = \cos A$.

11. Hieraus den Sinus dieses Winkels zu finden, erinnere man sich daß desselben Quadrat $= 1 - \cos A^2 = (1 + \cos A).(1 - \cos A)$.

12. Nun ist $1 + \cos A = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}$

Der Zähler hievon ist
$(b + c)^2 - a^2 = (b + c + a).(b + c - a)$.

13. Eben so $1 - \cos A = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2\,bc}$

Der Zähler hievon ist $-(b - c)^2 + a^2$; Es ist nähmlich gleichgültig ob man $b^2 + c^2 - 2bc$ für das Quadrat von $b - c$ oder von $c - b$ ansehen will, weil beyde entgegengesetzte sonst gleiche Grössen, einerley Quadrat geben.

Die-

Digitized by Google

Dieser Zähler wird also $(a+(b-c)).(a-(b-c)) = (a+b-c).(a-b+c)$.

14. Man hat also aus 12; 13;

$$\sin A^2 = \frac{(a+b+c).(b+c-a).(a+b-c).(a+c-b)}{4\,b^2\,c^2}$$

15. Oder

$$\sin A = \frac{\sqrt{((a+b+c).(b+c-a).(a+b-c).(a+c-b))}}{2\,b\,c}$$

16. Diese Regel mit Worten ausgedruckt heisst so:

Man will aus eines Dreyecks drey Seiten einen Winkel finden.

17. Hiezu ist folgendes eine Vorbereitung:

Man addire die drey Seiten zusammen.

Ferner addire man jede zwo Seiten, und ziehe von ihrer Summe die dritte ab; der Rest ist allemahl bejaht. Man bekömmt solcher Reste drey.

Man mache ein Product dessen vier Factoren, die Summe aller Seiten, und die drey Reste sind.

Aus diesem Producte ziehe man die Quadratwurzel. Sie mag u heissen.

Diese Vorbereitung ist einerley, welchen Winkel man auch sucht.

18. Nun dividire man diese Quadratwurzel durch das doppelte Product der beyden Seiten die einen Winkel einschliessen.

19. Der Quotient ist dieses Winkels Sinus für den Halbmesser 1.

20.

Digitized by Google

20. Multiplicirt man also den Quotienten mit dem Halbmesser der Tafeln, so hat man den Sinus für den Halbmesser der Tafeln.

21. Diese Regel hat die Bequemlichkeit daß man den Logarithmen des Sinus leichr berechnen kann, weil der Sinus durch lauter Producte und Quotienten gegeben ist, deren Logarithmen man durch Addiren und Abziehen einiger Logarithmen findet.

22. Sucht man indessen des Sinus Logarithmen schlechterdings nach der Vorschrift, so wird er verneint seyn, weil jeder Sinus für den Halbmesser 1 ein eigentlicher Bruch ist.

Man darf aber nur 10 zu diesem verneinten Logarithmen addiren, so bekömmt man den bejahten welcher dem Sinus in den Tafeln gehört.

23. Den verneinten Logarithmen drücke ich auf folgende Art bequem aus, ohne daß ich die Mühe habe ihn zu berechnen:

Er ist log u — log 2 bc wo 2 bc grösser ist als u. Da sehe ich nun, wieviel ich zu log u addiren muß, damit sich log 2 bc abziehen lässt, und ein bejahter Rest bleibt.

Diesen bejahten Rest schreibe ich hin, und hinter ihn, mit dem Zeichen —; das was ich addirt hatte. Eben wie ich es mit der 10 machte, den Logarithmen eines Sinus in den Tafeln, in den Logarithmen zu verwandeln, welcher diesem Sinus für den Halbmesser = 1 gehört.

24.

Digitized by Google

24. Exempel; $a=36$; $b=40$; $c=45$; So ist $u^2=121.(85-36).(81-40).(76-45)$ $=121.49.41.31$; $2bc=3600$.

Man beurtheilt leicht in jedem Exempel ob es kürzer ist ein Product selbst zu berechnen, und nun dessen Logarithmen zu brauchen, oder diesen Logarithmen aus den Logarithmen der Factoren zu finden.

log 121	= 2,0827854
49	= 1,6901961
41	= 1,6127839
31	= 1,4913617
Summe	= 6,8771271
halb = log u	= 3,4385635
abgezogen log 2 bc	= 3,5563025
log sin A	= 0,8822610 — 1 (23)
addirt	10,
log tab sin A	= 9,8822610

giebt den gesuchten Winkel 49 Grad zwischen 41 und 42 M.

25. Statt des in (23) gewiesenen Verfahrens, könnte man gleich 10 zu log u addiren, so fände sich log tab sin $A = 10 + \log u - \log 2bc$.

26. Indessen kann man bey dem Verfahren das ich gebraucht habe noch lernen, wie sich der Bruch dem ein verneinter Logarithme zugehört, bequem in Decimalbrüchen finden lässt.

Ich

Digitized by Google

Ich suche den Logarithmen 0,8822610 in grössern Tafeln, unter der Kennzifer 4 auf. Mit dieser Kennzifer gehört er zu 76253; Und also mit der Kennzifer 0; zu 7,6253. Nun soll man aber von diesem Logarithmen 1 abziehen. Das heisst, man soll einen Logarithmen haben der zu einer zehnmahl kleinern Zahl gehört, als die nur gefundene ist. Folglich gehört 0,8822610—1 als Logarithme zu 0,76253.

So findet man sin A für den Halbmesser 1 bis auf fünf Decimalstellen. Und das gefundene fällt auch zwischen die Sinus von 49 Gr. und 42 M.

27. Die Formel für den Cosinus (10) ist nicht völlig so bequem, weil man für sie Quadrate machen muß. Achtet man aber diese Mühe nicht, oder kann man Quadrattafeln brauchen, so ist übrigens die Rechnung nach dieser Formel noch kürzer als nach jener, und man kann auch die Logarithmen dabey anbringen.

28. Im Exempel wäre

$b^2 = 1600$	$10 + \log 2329 = 13,3671695$
$c^2 = 2025$	$\log 2bc = 3,5563025$
3625	$\log \text{tab cos } A = 9,8108670$
$a^2 = 1296$	
2329	

welches eben den vorigen Winkel giebt.

29. Noch hat diese Formel den Vorzug, daß sie anzeigt ob der Winkel spitzig oder stumpf ist (3. Erkl. 3. Zus.).

30.

Digitized by Google

30. Exempel. $a = 60$; $b = 19$; $c = 47$;

$$\text{cof } A = \frac{2209 + 361 - 3600}{2.47.19} = \frac{-1030}{2.893}$$

$$= \frac{-515}{893}$$

$$10 + \log 515 = 12{,}7118072$$
$$\log 893 = 2{,}9508515$$
$$\log \text{tab cof } A = 9{,}6709557$$

gehört zum Cosinus von 54 Gr. 46 M.

Weil aber die Formel zeigt daß der Cosinus verneint ist, so ist der Winkel

$$= 180° - (54° 46') = 125° 14'.$$

30. Wenn man die gewöhnlichen trigonometrischen Vorschriften (17. Satz) in analytische Zeichen übersetzt, so bekömmt man aus ihnen eben die hie gefundenen Formeln.

31. Wenn man einen Winkel gefunden hat, lassen sich die andern aus ihm nach dem 10. S. berechnen.

32. Oder in der That eben so leicht unmittelbar nach 16, weil man doch u einmahl berechnet hat, und nur für jeden Winkel einen andern Divisor bekömmt.

33. Für ein gleichschenklichtes Dreyeck, ist $b = c$; wenn der Winkel an der Spitze gesucht wird; also $u^2 = (a + 2b).(2b - a).a^2$

Da-

Digitized by Google

Daher $\sin A = \frac{a.\sqrt{((2b+a).(2b-a))}}{2b^2}$

$$\cos A = \frac{2b^2 - a^2}{2b^2} = 1 - \frac{a^2}{2b^2}$$

1. Zuſ. Aus zwo Seiten mit dem eingeſchloſſenen Winkel die dritte Seite zu finden, dient die Formel (Satz 10) $b^2 + c^2 - 2bc.\cos A = a^2$. Man muß hiebey nicht vergeſſen daß eines ſtumpfen Winkels Coſinus verneint iſt.

Daher iſt für einen ſtumpfen Winkel das Quadrat der Seite die ihm gegenüberſteht gröſſer als die Summe der Quadrate der Seiten die ihn einſchlieſſen, für einen ſpitzigen kleiner.

Dieſe Sätze ſtehn ſchon beym Euklides II. B. 12; 13. Satz. Freylich nicht durch Coſinus ausgedruckt.

Exempel. $b = 19$; $c = 47$; $A = 127° 12'$

179 60

52 48

$\cos A = -0,6045991$

$-2bc = -1786$

36275946
48367928
42321937
6045991

$-2bc.\cos A = +1079,81399$

$b^2 = 361$

$c^2 = 2209$

$a^2 = 3649,8140$

$a = 60,41$

Digitized by Google

Beym 20. Satze selbst (30) fand man aus den drey Seiten 19; 47; 60; den Winkel 125° 14′ Hie, wird also aus den beyden ersten Seiten wie vorhin, ein Winkel folgen, der um 1° 58′ grösser ist. So zeigt sich wie Aenderungen der Seite mit Aenderungen der Winkel zusammenhängen. Ein Beyspiel von dem Gebrauche der Trigonometrie der in Geom. 36. S. 3. Anm. angezeigt worden, und sich noch viel vollkommener machen lässt.

Wollte man sich die mühsame Multiplication ersparen, so liessen sich die Logarithmen folgendergestalt brauchen. Etwas an der Schärfe verliert man dabey, zumahl wenn man nur Logarithmen bis 10000 hat.

log cos A = 9,7814675 — 10
log 2bc = 3,2518815

3,0333490

giebt — 2 cb. cos A = + 1079, 8

Das Uebrige bleibt wie vorhin.

2. Zus. In einem Parallelogramm wie ABCD Geom. 48. Fig. sey die Seite AB = CD = f; BD = AC = g; der Winkel ABD = φ; So ist cos BAC = — cos φ

Der Diagonale AD Quadrat = $f^2 + g^2 - 2fg.$ cos φ

Der Diagonale BC Quadrat, = $f^2 + g^2 - 2fg.$ cos BAC = $f^2 + g^2 + 2fg.$ cos φ

Also $BC^2 + AD^2 = 2.(f^2 + g^2)$

$BC^2 - AD^2 = 4fg.$ cos φ

In

In einem Parallelogramm geben also die Quadrate der Diagonalen zur Summe, die doppelte Summe der Quadrate der Seiten.

Dieses wird zeigen wie man vermittelst der bisherigen Sätze, auch anderer Figuren Eigenschaften entdeckt. Weil sich nähmlich alle Figuren in Dreyecke zerlegen lassen.

3. Zus. Den Halbmesser des Kreises zu berechnen, der sich um ein Dreyeck dessen Seiten gegeben sind beschreiben läßt.

Also, arithmetische Auflösung von (Geom. 17. S. 1. Zus.).

I. Der Kreis sey der in der 5. Fig. sein Halbmesser = r.

II. Also (20. S. 1) $\frac{a}{2r} = \sin A$; Und diesen Sinus aus (20. S. 15) genommen

$$r = \frac{a\,b\,c}{\sqrt{((a+b+c).(b+c-a).(a+b-c).(a+c-b))}}$$

III. Ist das Dreyeck gleichschenklicht a=b; so kömmt

$$r = \frac{a^2 c}{\sqrt{((2a+c).(2a-c))}}$$

IIII. Ist es gleichseitig, also auch c=a; so wird in (III) der Nenner = $\sqrt{(3\,a.\,a)}$ also

$$r = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

V. Für das Dreyeck des Satzes könnte man den im Satze 24; berechneten Sinus brauchen;

Digitized by Google

$\log 18 = \log \frac{1}{2}a = 1,2552725$
abgezogen $\log \sin A = 0,8822610 - 1$

$\log r = 1,3730115$
$r = 23,605$

VI. Wenn man von einem Kreiſe nur einen Bogen hat, nimmt man in ihm drey Puncte, und ſucht den Halbmeſſer des Kreiſes durch dieſe drey Puncte, das iſt der, welchem der Bogen gehört. Iſt dieſer Halbmeſſer groß, ſo wird die Rechnung bequemer und richtiger ſeyn als die Zeichnung. Man wird ſich auch nach (III) eine Erleichterung verſchaffen, wenn man von einem Puncte, ohngefähr mitten im Bogen, nach beyden Seiten gleiche Sehnen = a nimmt, und des gleichſchenklichten Dreyecks das ſie geben Grundlinie c miſſt.

Wiederhohlt man dieſes Verfahren mit mehr Paaren ſolcher gleichen Sehnen, ſo giebt dieſes Proben, ob man richtig gemeſſen und gerechnet hat.

VII. Ob ein vorgegebener Bogen einer krummen Linie ein Kreisbogen iſt, lieſſe ſich ſo prüfen, daß man mehrmahl drey Puncte in ihm bezeichnet, und den Halbmeſſer für die jedesmahligen drey berechnet. Der muß allsdann immer von einer Gröſſe oder doch nicht von ſehr unterſchiedner gefunden werden, wenn der Bogen für einen Kreisbogen ſoll angenommen werden. So lieſſe ſich Lamberts Vorausſetzung unterſuchen, daß die Krümmung der Fäſſer gleichförmig iſt.

VIII.

Digitized by Google

VIII. Lägen die drey gegebenen Puncte in einer geraden Linie, so müsten von den drey Linien die als Seiten des Dreyecks sind betrachtet worden, ein Paar zusammen soviel betragen als die Dritte, so würde in (II) im Nenner einer der Factoren = o; und r unendlich (Geom. 20. S. 2. Zus.).

IX. Man setze a = o; so wird in (II) der Zähler = o; der Nenner = $\sqrt{((b+c)^2.(b-c)^2)}$ = (b+c). (b—c).

Aber die Voraussetzung erfodert daß B und C auf einander fallen, also b = c.

Folglich wird der Nenner = 2 b. o.

X. Was ein Bruch bedeutet dessen Zähler und Nenner zugleich = o sind, davon ist bisher noch nichts vorgekommen, soviel kann man sich leicht überzeugen, daß er nicht nothwendig allemahl = o seyn müsse.

Dieses darzuthun ist ein einziges Exempel genug: In $\frac{(e-x).n}{e^2-x^2}$ setze man x = e; so kömmt $\frac{o.n}{o}$. Aber der Bruch ist = $\frac{n}{e+x}$ (Nr. 2. 5.) also für e = x wird er = $\frac{n}{2e}$.

Wie man überhaupt findet was ein Bruch dessen Zähler und Nenner zugleich verschwinden bedeutet? ob er einen bestimmten Werth hat, oder vielleicht unzählige, läßt sich hie nicht aus-

führen. Man sehe meine Analysis des Unendlichen 372. §.

XI. Hie, ist die Frage nach einem Kreise der durch A und B geht, wo C zugleich auf B fällt.

Das thut aber jeder Kreis der seinen Mittelpunct in dem Perpendikel hat das AB halbirt.

Also zeigt hie das Verschwinden des Zählers und Nenners an: die Aufgabe sey unbestimmt, und es gebe unzählich viel solche Halbmesser.

Auch ein solcher Fall wo Zähler und Nenner eines Bruchs zugleich verschwinden steht in meiner Fortsetzung der Rechenk. XI. C. 2. Aufg. 180. §. Es ist gut dergleichen in den Anfangsgründen kennen zu lernen, damit man so was nicht für Geheimnisse der Rechnung des Unendlichen hält.

21. Satz.

Aus den drey gegebenen Seiten eines Dreyecks seinen Innhalt zu finden.

1. Man stelle sich in der bisher gebrauchten 5. Fig. ein Perpendikel von B auf AC vor. Es heisse h; des Dreyecks Innhalt T.

So ist $T = \frac{h.b}{2}$

2. Aber $h = c.\sin A$; also

$T = \frac{1}{2}bc.\sin A.$

$= \frac{1}{4}u$ (20. Satz 15; 17.)

3. Im

Digitized by Google

3. Im vorigen Exempel (20. Satz 24)

log u = 3,4385635
log 4 = 0,6020600
log T = 2,8365035

giebt den Innhalt 686, 28; Quadratfuß, wenn man die Seiten mit Fussen gemessen hat u. s. w.

4. Man berechnet solchergestalt den Innhalt ohne die Höhe, und ohne einmahl den Winkel zu wissen. Nähmlich u wird nur durch die drey Seiten bestimmt. Und die geben den Innhalt, der allerdings einerley bleiben muß, welche Seite man auch zur Grundlinie angenommen hätte. Daher befindet sich die Höhe, und der Winkel der sie bestimmt nicht in der Rechnung.

5. Man kann daher die Auflösung gegenwärtigen Satzes so vortragen, daß man nur zeiget wie u berechnet wird (20. Satz 17.). So lehren es schon ältere Schriftsteller.

Diese Vorschrift ist für die practische Geometrie sehr wichtig. Einmahl findet man auf diese Art den Innhalt des Dreyecks ohne daß man es zu zeichnen braucht, und wer im Rechnen geübt ist, wird diese Arbeit eben so gern verrichten, als eine Zeichnung machen die so richtig seyn soll, daß sich aus ihr des Dreyecks Innhalt mit grosser Schärfe finden lässt.

Zweytens, wenn man das Dreyeck gezeichnet hat, so muß noch das Perpendikel gezogen und gemessen werden, den Innhalt daraus zu berech-

Digitized by Google

rechnen. Das sind also noch zwo Arbeiten mehr, bey deren jeder ein kleiner Fehler vorgehen kann, wodurch zwo Gelegenheiten mehr kommen, den Innhalt etwas unrichtig zu finden, die man bey der Berechnung aus den blossen Seiten völlig vermeidet.

Drittens, wenn man des Dreyecks Grundlinie und Höhe, zu einer scharfen Berechnung genau ausdrucken will, so bekömmt man oft für jede eine Zahl mit etlichen Zifern. Da ist die wirkliche Multiplication dieser beyden Zahlen, gewiß mühsamer, als die Vorschrift (3) wo man nur Logarithmen braucht.

6. Verlangt man aber die Höhe des Dreyecks über einer der Seiten als Grundlinie angenommen, zu wissen, so berechnet man sie leicht aus (2).

Und wenn man diese Höhe berechnet, oder in einer Zeichnung gemessen hat, so kann man aus ihr und der Grundlinie, leicht den Innhalt durch die Logarithmen berechnen. Im Exempel

$\log \sin A = 0,8822610 - 1$
$\log c = 1,6532125$
$\log h = 1,5354735$
$\log \frac{1}{2} b = 1,3010300$
$\log T = 2,8365035$ wie vorhin.

Der Logarithme giebt $h = 34,314$.

7. Sind in einem Dreyecke zwo Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel gegeben, so be-

Digitized by Google

erechnet man daraus, unmittelbar den Innhalt
ach (2).

8. Nun enthält die Formel für diese Rech-
ung nur des Winkels Sinus. Und ein Sinus
ann hie zweenen Winkeln gehören. (Nicht meh-
rn, weil im Dreyecke Winkel über 180° nicht
orkommen). Also bleibt des Dreyecks Innhalt
nerley, die beyden gegebenen Seiten mögen
nen spitzigen [redacted]inkel machen, oder desselben
ebenwinkel.

Man kann sich dieses bey der 42. Fig. der
om. vorstellen, wenn man setzt es sey AD =
B; So sind die Dreyecke CAB; CAD; glei-
n Innhalts.

9. Exemp. b = 40; c = 45; A = 49° 41′
so $\frac{1}{2}$ bc = 20. 45 = 900
; $\frac{1}{2}$ bc = 2,9542425
; sin A = 0,8822285 — 1
; T = 2,8364710
bt den Innhalt 686,23. Ein wenig kleiner
in (3) wo eben die Seiten einen Winkel ma-
n, der nur ein wenig grösser ist als der hie
genommene.

Eben der Innhalt käme auch, wenn eben die
iten einen Winkel von 130° 19′ machten.

10. Man kann noch die Frage abfassen: Von
m Dreyecke ist der Innhalt gegeben, nebst
Seiten: wie groß ist der Winkel den diese
iten einschliessen?

Digitized by Google

Aus (2) ist hie $\sin A = \frac{2T}{b.c}$

11. Soll diese Aufgabe möglich seyn so muß 2 T kleiner seyn als b. c, sonst kommt der Sinus grösser als 1.

Nur in dem Falle, wenn die Seiten einen rechten Winkel einschliessen, ist der doppelte Innhalt ihrem Producte gleich.

Das heisst: der Innhalt eines Dreyecks, ist allemahl kleiner als die Hälfte des Products zwoer Seiten des Dreyecks, wenn diese Seiten einen schiefen Winkel einschliessen: So groß als diese Hälfte, wenn der Winkel ein rechter ist.

12. Exemp. Eines Dreyecks Innhalt soll 50 Quadratfuß seyn. Eine Seite soll 90 Fuß seyn, die andere 70. Wie groß ist ihr Winkel?

$10 + \log 2T = 10 + \log 100 = 12,$

$\log b.c = \log 6300 = 3,7993405$

$\log \text{tab} \sin A = 8,2006594$

giebt den Winkel $0^{\circ}\ 54'\ 34'' +$

oder $179\ 5\ 26\ -$

Die genaue Bestimmung des Winkels ist aus den Tables de Logarithmes &c. Avignon 1770; genommen, wo von den ersten vier Graden alle Secunden zu finden sind. Dieses nur zur Erinnerung daß man bey solchen kleinen Winkeln auf die Secunden genauer acht geben muß, als bey grössern höchst nothwendig ist.

13.

Digitized by Google

13. Endlich könnte man auch einen der beyden Schenkel des Winkels suchen, wenn der andere, nebst dem Winkel und dem Innhalte gegeben ist.

Da wäre $c = \frac{2T}{b \cdot \sin A}$

14. Will man hie mit den Logarithmen rechnen, so muß man sich den Tafellogarithmen des Sinus um 10 vermindert vorstellen, und so abziehn. Oder man kann zum Logarithmen von 2T gleich 10 addiren, und nun den Tafellogarithmen des Sinus behalten. Da druckt man die Formel so aus:

$\log c = 10 + \log 2T - (\log b + \log \text{tab sin } A)$

15. Exempel. Des Dreyecks Innhalt soll 50 Quadratfuß seyn; Der Winkel 70 Grad, und ein Schenkel 20 Fuß, wie lang ist der andere?

$\log b = \log 20 = 1,3010300$

$\log \text{tab sin } A = 9,9729858$

$11,2740158$ abgezogen

von $\log 2T = 12,$

$\log c = 0,7259441$

giebt $c = 5,3208$ Fuß.

16. Aus 5. Erkl. 1. Zus. erhellt daß man die Formel (13) auch so ausdrucken kann:

$c = \frac{2T}{b} \cdot \text{cosec } A.$

17. Diesen Ausdruck könnte man brauchen, wenn man mit den Zahlen selbst rechnete da es

Digitized by Google

bequemer ist mit der Cosecante zu multiplicíren, als mit dem Sinus zu dividiren.

18. Einen Logarithmen abziehen, ist nicht viel mehr Mühe als einen addiren. Daher ist es bey dem Gebrauche der Logarithmen ziemlich einerley ob man nach (14) oder nach (16) rechnet. Besitzt man indessen Tafeln, wo sich der Secante Logarithme befindet, so verfährt man bey dem Exempel (15) folgendergestalt

$$\log 2T + \log \operatorname{cosec} A = 2,0270142$$
$$\text{abgezogen } \log b = \log 20 \quad = 1,3010300$$
$$\log c \quad = 0,7259841$$

völlig wie vorhin.

19. Die Lehren von (7) bis hieher sind auch unmittelbar in der praktischen Geometrie nicht ohne Nutzen. Hauptsächlich aber habe ich sie hie beygebracht um zu zeigen wie einerley Formel, so wie die, nach welcher von (7) an ist gerechnet worden, mancherley Aufgaben auflöset, nachdem man von den Buchstaben die in ihr vorkommen, den oder jenen für unbekannt annimmt. Jede solcher Aufgaben erfodert nach dem sonst gewöhnlichen Vortrage eine eigne Auflösung, da man den Zusammenhang dieser Auflösungen mit einander nicht so leicht übersieht.

20. Auch dienen die Exempel Anfängern den mannichfaltigen Gebrauch der Logarithmen zu erläutern, besonders wenn man die Logarithmen der Tafeln nicht gleich so wie sie da stehen hinschrei-

Digitized by Google

schreiben kann, sondern zu gewissen Absichten verändern muß.

21. Bisher habe ich nur einige von den leichtesten und allergemeinsten Anwendungen der Buchstabenrechnung und damit verbundenen Analysis gewiesen. Da überall wo Messungen angestellt werden, Dreyecke vorkommen, so erstreckt sich der Gebrauch der analytischen Trigonometrie durch die ganze Mathematik. Häufige Proben davon wird man in meinen astronomischen Abhandlungen finden. Ein vortrefflicher Lehrbegriff ist Hr. Ge. Sim. Klügel Prof. der Mathem. zu Helmstädt analytische Trigonometrie Braunschw. 1770. Hr. Lampe hat in Briefen über verschiedene Gegenstände aus der Mathematik 1780; einiges aus meiner Trigonometrie erläutert, so wie er in seinen Erläuterungen der Kästnerischen Anfangsgründe der Ar. Geom. und Trig. Leipz. 1781. dieses ausführlicher geleistet hat.

Die sphärische Trigonometrie.

1. Erklärung.

Ein Dreyeck das drey Bogen gröster Kreise auf einer Kugelfläche BP; PA; AB; i. F. machen, heißt ein sphärisches oder ein Kugel-

Drey-

Dreyeck. Die Bogen heissen seine Seiten, und die sphärischen Winkel (G. 52. S. 4. Z.) seine Winkel.

1. Zus. Man ziehe von den Durchschnittspuncten der Bogen, Linien nach der Kugel Mittelpuncte K; so sind die Seiten des Dreyecks die Maasse der Winkel PKB; PKA; AKB. Von einer Seite Endpuncte 4. F. fallen auf die Ebene der andern AKB und auf beyder Ebenen Durchschnitt BK die Perpendikel PM; PN; so ist PNM = B (G. 46. S. 6. Z). Eben so PQM = A.

Anm. Der Kürze wegen will ich durch den Bogen BA die Grösse dieses Bogens in Graden; aber durch die Ebene BA die Ebene des ganzen grössten Kreises, von dem BA ein Bogen, und BKA ein Ausschnitt ist, andeuten.

2. Zus. Die drey Ebenen BP; PA; BA; schliessen am Mittelpuncte der Kugel einen körperlichen Winkel ein (G. II. Th. 3. Erkl.). Er ist die Spitze einer Art von Pyramiden, deren krumme Grundfläche die Fläche des Kugeldreyecks wäre; Was also die Geometrie von den ebenen Winkeln die einen körperlichen Winkel einschliessen erweiset, gilt von den Seiten des Kugeldreyecks.

Anm. Diese Lehren muß ich hie weglassen, weil ich vom körperlichen Winkel nicht umständlich gehandelt habe. Dahin gehört, daß in jedem Kugeldreyecke die Summe zwoer Seiten grösser als die dritte und die aller drey weniger als der ganze Kreis ist. Aus Euklidens XI. B. 20; 21; S.

3. Zus.

Digitized by Google

3. Zus. Wenn die Seite PA in der Ebene durch PM und K liegt, 1. F. so steht sie auf der Ebene KB senkrecht (G. 47. S.) und das Dreyeck PAB heißt rechtwinklicht; PA sein Perpendikel; BA die Grundlinie, oder das andere Perpendikel, PB die Hypotenuse.

4. Zus. Wenn N. M. K zusammen fallen, so können B und A zugleich rechte Winkel seyn, alsdenn ist P des Kreises BA Pol (G. 52. S. 2.).

5. Zus. Also kann ein Kugeldreyeck DPE G. 110. F. nach Verschiedenheit des Winkels am Pole drey rechte Winkel oder zween rechte und einen stumpfen haben. Daher was G. 13. S. von ebenen Dreyecken lehret, hie nicht gilt, wodurch denn diese Trigonometrie viel weitläuftiger wird als die ebene.

6. Zus. Wenn drey grösste Kreise einander schneiden, so kann man allezeit drey ihrer Durchschnittspuncte so annehmen, daß jede Seite des sphärischen Dreyecks, das sie geben, kleiner als 180 Gr. ist (G. 49. S. 5. Z.). Nur von solchen Dreyecken ist in der Folge die Rede.

2. Erklärung.

Die Wissenschaft aus drey gegebenen Seiten oder Winkeln eines Kugeldreyecks die übrigen zu berechnen; heißt die sphärische Trigonometrie.

Von

Von rechtwinklichten Dreyecken.

1. Satz. Lehrsatz.

In der 1. F. ist aus 1. Erkl. 3. Zus.

I; r: ſBP = ſB: ſPA

II; r: ſBA = tB: tPA

Bew. Das Loth PM (1. Erkl. 1. Z.) fällt hie in die Ebene PKA (G. 47. S. 2. Z.) also ist für den Halbmesser der Kugel, PN = ſPB; PM = ſPA; aber PN: PM = r: ſB (1. Erkl. 1. Zus.) folglich r: ſB = ſBP: ſPA; für I

ferner KM: MP = r: tAP

MP: NM = tB: r also (Ar. V. 51.)

KM: NM = tB: tPA

aber KM: NM = r: ſBA; also auch II. erwiesen.

1. Zus. In einem rechtwinklichten Dreyecke, ist der rechte Winkel allemahl gegeben. Nächst ihm nun können noch zwey Dinge gegeben und ein drittes daraus unmittelbar gesucht werden. Man nenne diese drey Dinge, die in der Frage vorkommen, Glieder der Frage, (terminos quaestionis); so finden folgende Mannichfaltigkeiten bey ihnen statt; Sie können seyn

α) drey Seiten; β) 2. W. Hypot. γ) 2. W. 1. Perpend. δ) 2. Perpend. 1. W. ε) Hypot. Perp. anlieg. W. ζ) Hyp. Perp. gegenüberstehend. W.

2. Zus.

Digitized by Google

2. Zuſ. Aus I wird ℌ; und aus II; ♂ aufgelöſt. Es erhellet aber, daß jede dieſer Proportion drey Fragen beantwortet; weil jedes Glied der Frage das geſuchte ſeyn kann; zu dieſer Abſicht braucht man nur die Proportion ſo zu ordnen, daß das geſuchte zuletzt kömmt.

3. Zuſ. Aber die übrigen Fragen, folgen aus I oder II unmittelbar nicht. Man verlängere 2. F. BP, BA bis BN; BM; Quadranten werden; ſo ſind bey M; N; rechte Winkel; und die Bogen AP; MN, ſchneiden einander in des Kreiſes BA Pole D; (G. 52. S. 5. Z.) alſo ſind PN; DP; die Ergänzungen von BP; PA; (G. 52. S. 2. Z.) und D; DN; von BA; B; (G. 52. S. 4. Z.). Alſo folgt aus I im Dreyecke DPN; r: ſDP = ſD: ſPN und r: ſDP = ſP: ſDN aus II folgt r: ſDN = tD: tPN und r: ſPN = tP: tDN. In dieſen beyden Proportionen, drucke man die Glieder ſo aus, wie ſie ſich auf das Dreyeck BPA, beziehen, ſo geben ſie

III; r: coſ PA = coſ BA: coſ BP für α
IIII; r: coſ PA = ſP : coſ B ... γ
V ; r: coſ B = cot BA: cot BP ... ε
VI; r: coſ BP = tP : cot B ... β

Dieſe VI Proportionen thun alſo allen Fragen genug; Man kann auch einige von ihnen aus Trig. 5. Erkl. 2. Zuſ. anders ausdrucken; nähmlich

aus II. wird VII; r: sBA = cot AP: cot B.
u. aus V; VIII; r: cos B = tBP : tBA.
aus VI; VIIII; r: cos BP = tB : cot P.

4. Zus. Damit die Mühe erspart wird, für jeden Fall jeder Frage die Proportion gehörig zu ordnen; kann man sich nachfolgender Tafel bedienen. Man darf sich an jedes rechtwinklichte Dreyeck, das vorkömmt, nur die Buchstaben des bisher betrachteten schreiben, so findet man in der Tafel allezeit die Proportion, welche jede vorkommende Fragen auflöset. B und P lassen sich verwechseln, daß man bey den meisten Fällen zwo Zeilen machen könnte. In allen Proportionen ist der Halbmesser, welches die Rechnung erleichtert. Man hat ihn aber auch aus eben der Absicht so viel als möglich ins erste Glied zu bringen gesucht, und das ist die Ursache der Einrichtungen beym 9. 12. 15. Falle. Daß aber die Tafel alle mögliche Fälle enthält, zeigt sich folgender Gestalt. Wenn jedes Glied der Frage zum gesuchten gemacht wird, so giebt α zweene Fälle 14; 1; denn welches Perpendikel gesucht wird ist gleichgültig. Eben so viel giebt β, nähmlich 15; 3. Aus γ werden drey 16; 7; 11. Aus δ auch soviel 2; 8; 9; imgleichen 12; 4; 6; aus ε; und 13; 5; 10; aus ζ.

Gege

Digitized by Google

Gegeben	Gesucht	Proportion	Fall	aus
BA; PA	BP	r: cos BA = cos PA: cos PB	1	III.
BA; PA	B	r: sBA = cot PA: cot B	2	VII.
BP; P	B	r: cos BP = tP: cot B	3	VI. VIIII.
BP; P	PA	r: tBP = cos P: tPA	4	VIII.
BP; B	PA	r: sBP = sB: sPA	5	I.
BA; B	BP	r: cos B = cot BA: cot BP	6	V.
BA; B	P	r: cos BA = sB: cos P	7	IIII.
BA; B	PA	r: sBA = tB: tPA	8	II.

Digitized by Google

PA; B	BA	r: cot B = tAP: ſAB weil cot AP = $\frac{r^2}{tAP}$	9	VIII.
PA; B	BP	ſB: ſPA = r: ſBP	10	I.
PA; B	P	coſ PA: r = coſ B: ſP	11	IIII.
BA; BP	B	r: cot BP = tBA: coſ B weil tBP = $\frac{r^2}{\cot BP}$	12	VIII.
PA; BP	B	ſBP: r = ſPA: ſB	13	I.
PA; BP;	BA	coſPA: r = coſBP: coſBA	14	III.
B; P	BP	r: cot P = cot B: coſBP weil tB = $\frac{r^2}{\cot B}$	15	VIIII.
B; P;	PA	ſP: r = coſ B: coſ PA	16	IIII.

5. Zuſ. Wenn nicht alle Seiten des Dreyeckes kleiner als Quadranten ſind, ſo ſind der gröſſeren ihre Coſinus und Tangenten verneinend, die Sinus aber allemahl bejahend, (1. Erkl. 6. Zuſ. und Trigon. 2. Erkl. 7. Z. 3. Erkl. 2. Z. 4. Erkl. 1. Z. 5. Erkl. 3. Z.) woraus man zugleich meiſtens ſieht, ob das, was geſucht wird, gröſſer oder kleiner als ein Quadrant iſt. Z. E. im 1. Falle iſt die Hypotenuſe kleiner als ein Quadrant, wenn beyde Schenkel einer wie der andere kleiner oder gröſſer als Quadranten ſind, aber gröſſer, wenn einer gröſſer, der andere kleiner iſt. So enthalten die Regeln wegen der Zeichen mit den Regeln der Multiplication und Diviſion Ar. I. 108. 112. verbunden, eine Menge Lehrſätze, die ſonſt in der Sphärik weitläuftiger erwieſen werden, ob es wohl nicht undienlich iſt, die Art, wie man ſie aus der Lage der Ebenen herleiten kann, ſich bekannt zu machen, und einzuſehen, wie dieſe Schlüſſe mit den Folgerungen aus den Zeichen im Grunde einerley ſind. Wegen der Logarithmen ſehe man Trig. 2. S. 2. Anm. Es iſt aber nöthig dieſe Sätze aus den Zeichen hie herzuleiten; denn ſonſt enthält jede Auflöſung eine Zweydeutigkeit (ambiguitatem) weil das Zeichen beyſeite geſetzt, einerley Tangente, Coſinus; u. d. gl. mehreren Winkeln oder Bogen, und zwar hie nur zweyerley (1. Erkl. 6. Z.) zugehören können. Der Kürze wegen, will ich Winkel und Bogen beyde ſpitzig oder ſtumpf nen-

Digitized by Google

nen, nachdem sie unter oder über 90. Gr. sind. Und wenn ein Bogen u. ein Winkel, oder ein Paar Bogen, oder ein Paar Winkel, beyde zugleich spitzig, oder beyde zugleich stumpf sind, so sollen sie gleichartig, aber wenn in einem solchen Paare eines stumpf das andere spitzig ist, ungleichartig heissen. So fliesst also aus den Proportionen des Satzes und des 3. Zus. folgendes:

6. Zus. Ein schiefer Winkel und das ihm gegenüberstehende Perpendikel sind allemahl gleichartig: Aus II. denn sBA ist allezeit bejahend: Also ist tAP bejahend oder verneinend, nachdem es tB ist; das ist; AP ist spitzig oder stumpf, nachdem es B ist.

7. Zus. Wenn beyde Winkel spitzig oder stumpf sind, sind es auch beyde Perpendikel; Ist ein Winkel spitzig, der andere stumpf, so verhält es sich mit den Perpendikeln auch so.

8. Zus. Wenn beyde Perpendikel gleichartig sind, so ist die Hypotenuse spitzig; stumpf aber, wenn sie ungleichartig sind (III.). Umgekehrt sind die Perpendikel gleichartig oder ungleichartig, nachdem die Hypotenuse spitzig oder stumpf ist.

9. Zus. Die Hypotenuse ist spitzig oder stumpf; nachdem ein Winkel mit der anliegenden Seite gleichartig oder ungleichartig ist (V.).

10. Zus. Ein Winkel ist spitzig oder stumpf, nachdem der andere mit der Hypotenuse gleichartig oder ungleichartig ist (VI.).

11. Zus.

Digitized by Google

11. Zuſ. Aehnliche Betrachtungen zeigen, wie der 5. Zuſ. am erſten Falle gewieſen hat, ob das geſuchte ſpitzig oder ſtumpf iſt, in allen Fällen, den 5; 9; 10; 11; 13; ausgenommen. Bey dem 5. und 13. entſcheidet ſich die Zweydeutigkeit aus 6. Zuſ. aber beym 9; 10; 11; läſſt ſie ſich blos aus den gegebenen Gröſſen nicht entſcheiden. Wenn nähmlich 3. F. von b, der Kreiſe BP, BA, zweytem Durchſchnitte, bp; ba; den genannten Bogen gleich genommen werden, ſo erhellt, daß pa = PA; und alſo kann bey vollkommen gleichen gegebenen Dingen das geſuchte in dieſen drey Fällen auch Ba; Bp; Bpa; ſeyn. Dieſe Fälle ſind hie, was in der ebenen Trigon. der 12. S. iſt.

12. Zuſ. Wenn in einem Dreyecke 6; 7; F. BP = 90°, ſo nehme man auch BD = 90°, da denn DA = ± BA ∓ 90 Gr. DPA = ± BPA ∓ 90 Gr. DP = B (G. 52. S. 2. Z.). Alſo läſſt ſich die Auflöſung eines Dreyecks, deſſen eine Seite ein Quadrant iſt, allemahl auf die Auflöſung eines rechtwinklichten bringen. Und daher hat man die folgenden Regeln für ſchiefe Dreyecke nur da nöthig, wo keine Seite ein Quadrant iſt; ob ſie gleich auch allsdenn wahr ſind, wenn dieſes ſtatt findet.

Von schiefen Dreyecken.

2. Satz. Aufgabe.

Die Umstände zu bestimmen, unter denen das Perpendikel innerhalb oder auserhalb eines schiefen Dreyecks fällt.

Aufl. 1. Auf dem ganzen Kreise der 5. F. den ich den Grund nennen will, stehe der Halbkreis APa senkrecht. In diesem nehme man nach Gefallen P, und lege dadurch einen schiefen Halbkreis DPd; dieser macht mit dem Grunde ohnfehlbar zweene spitzige und zweene stumpfe Winkel; (G. 52. S. 4. Z.) Jene mögen ADP; AdP; diese aDP; adP seyn; so ist PA spitzig, Pa stumpf (1. S. 6. Z.) oder eines senkrechten Kreises spitziger Bogen fällt zwischen die beyden spitzigen Winkel des schiefen, der stumpfe zwischen die stumpfen.

2. Man lege einen andern Halbkreis auch schief BPb; so sind die Winkel ABP; AbP; spitzig, abP; adP; stumpf, und wenn BA spitzig angenommen wird, ist auch BP spitzig (1. S. 8. Z.).

3. Die Figur stellt also vier Dreyecke vor: I) BPD, beyde Winkel am Grunde spitzig; II) bPd beyde stumpf; III) bPD; D stumpf; b, spitzig IIII) BPd; B stumpf, d spitzig. Das spitzige Perpendikel fällt innerhalb I, und das stumpfe innerhalb II. (1; 2.) oder wenn die Win-

Digitized by Google

Winkel am Grunde gleichartig sind, fällt das Perpendikel innerhalb des Dreyecks, und ist mit ihnen gleichartig; Sind sie aber ungleichartig; so fällt es auserhalb des Dreyecks und ist mit dem Winkel ungleichartig, der ihm am nächsten liegt; PA mit PDb; Pa mit PdB.

4. Wenn r = 1 (Trig. 19. S. Anm.) so ist (1. S. 2. Fall) cot PDA = cot PA. ſ AD; der erste Factor bleibt unverändert, der zweyte wächst, wenn AD wächst, und ist positiv; folglich wächst cot PDA unter diesen Umständen; und ist positiv; Folglich nimmt der spitzige Winkel PDA allsdenn ab; dieses dauert, bis D in Q fällt, daß AQ = 90 Gr. oder ſAQ = 1; da RQA = PA. weil beyde Dinge gleichartig sind (1. S. 6. Z.) rückt D noch über Q in Δ, so nimmt ſAΔ ab, indem sein stumpfer Bogen zunimmt; also nimmt auch cot PΔA ab; d. i. dieser Winkel wieder zu; bis Δ in b fällt und ſAΔ = ſAB da der Winkel Δ = b = B wird.

5. Weil nun d zugleich mit D fortrückt; so nimmt im Dreyecke bdP, der genannte stumpfe Winkel; des vorigen (4) Ergänzung zu 2R; zu, indem d von a bis q rückt, da er = Pa wird, und von dar wieder abnimmt.

6. Im Dreyecke PDb; nimmt der stumpfe Winkel zu, indem die Seite bD abnimmt, bis sie bQ wird, von dar nimmt er ab, und wird von Pba unendlich wenig unterschieden wenn Δ unendlich nahe an b rückt.

7. Eben so ist cos PD = cos PA. cos DA (1. S. 1. Fall) wo der erste Factor wieder ungeändert bleibt, der zweyte aber, indem D von A wegrückt, anfangs bejahend ist, und abnimmt; daß also cos PD auch bejahend ist, und abnimmt, oder der Bogen PD spitzig ist und zunimmt. In Q wird cos AQ = 0; also PD = 90 Gr; nachgehends ist cos AΔ verneinend, und wächst mit AΔ selbst; also wächst auch der stumpfe Bogen PΔ bis Δ in b fällt.

8. Im Dreyecke II. (3) nimmt also der Bogen Pd beständig ab, indem d von a durch q nach B rückt, ist anfangs stumpf bis q, und nachgehends spitzig.

9. Im Dreyecke III. (3) verändert sich PD wie 7. zeigt.

10. Wofern AD < AB so nehme man AT = AD, und es ist PD = PT (1. S. 1. Fall) und PDA = PTA (1. S. 2. Fall) also BTP = 2R — PDA.

11. Es ist aber alsdenn PT oder PD < BP, wie erhellt, wenn man T von A nach B wie vorhin (7) D von A nach b rücken lässt.

12. Im Dreyecke I (3) also können BP, B, PD gegeben seyn, und kann doch ein Dreyeck PBT wie III; aus eben den gegebenen Dingen gemacht werden, wenn PD < BP; sonst aber nicht (10; 11.) und ist in dem letzten Falle BDP allemahl spitzig (4).

13.

Digitized by Google

13. Aus den gegebenen Dingen bP; b, Pd, im Dreyecke II; kann auch bPt werden; wenn Pd > Pb (8) sonst aber nicht, und ist im letzten Falle Pdb stumpf.

14. Aus PbD, Pb, PD, lässt sich auch das Dreyeck PTb machen, wenn PD < 2R — Pb (10. 11.).

15. Aus PBd; PB; Pd; auch das Dreyeck PtB, wenn 2R — Pd < PB.

16. Bedeutet also überhaupt W einen Winkel, l die an ihm liegende Seite; L die ihm gegenüberstehende, w den Winkel, welcher der Seite l gegenübersteht; dergleichen B, BP, PD, D, im I Dreyecke sind, und ist

W	l	L	so ist	w	
spitzig	spitzig	kleiner als l		zweydeutig spitzig	12
		gröſſer			
stumpf	st.	gr.		zweydeutig stumpf	13
		kl.			
spitzig	st.	kl. als 2R—l		zweydeutig stumpf	14
		gr.			
stumpf	sp.	gr.		zweydeutig spitzig	15
		kl.			

17. In 4 sey AΔ = 2R — AD; so ist PDA = PΔA (4) und — cos DA = cos ΔA also PD + ΔP = 2R (7) Nun ist das gröſste AΔ = 2R — AB; also das kleinste AD dessen D ein hie bestimmtes Δ zugehört, = AB. Aber für AD = AB; ADP = ABP (10) also für AD > AB; ADP < ABP (4) weil AB spitzig

zig ist, (2) und es also grössere spitzige AD giebt. Es giebt aber soviel solche grössere spitzige AD, so viel es stumpfe AΔ giebt, denn jene endigen sich alle innerhalb eines Bogens, der = AQ — AB ist, und diese innerhalb des gleichen Bogen Ab — AQ. Zu jedem dieser AD, gehört ein AΔ da AΔP = ADP, und AD + AΔ = 2R; aber zu jedem dieser AD gehört ein ADP < ABP; und jeder ADP > ABP gehört zu einem AD < AB (4). Wenn also BP, ~~BPD~~, BDP gegeben sind; und der letzte Winkel kleiner ist als der erste; so giebt es zwey Dreyecke, welche diese gegebene Dinge enthalten; des zweyten Seite ist PΔ = 2R — PD; Ist aber der letzte Winkel grösser als der erste, so giebt es nur ein solches Dreyeck, dessen Seite PD spitzig ist (7).

18. Sind im Dreyecke II. (3); bP; b; d; gegeben; so kann die dritte Seite Pd oder Pδ seyn, wofern im Dreyecke I. die dritte Seite nach 17; PD oder PΔ seyn kann; d. i. wofern 2R — Pdb < 2R — Pbd oder Pbd < Pdb; Ist aber dieses nicht, so giebt es nur ein stumpfes Pd.

19. Sind im Dreyecke III. (3) bP; b; D, gegeben, so finden zwo Seiten statt, wenn 2R — PDb < PbD; sonst ist nur eine spitzige Seite PD.

20. Sind im Dreyecke IIII; (3) PB; B, d, gegeben, so finden zwo Seiten statt, wenn PdB < 2R — PBd; auser dem aber nur eine stumpfe Pd.

21.

Digitized by Google

21. Dieſes giebt alſo wie in 16 folgende Tafel: Wenn

W;	l;	w	ſo iſt	L	
ſpitzig	ſpitzig	kleiner als W; gr. . . .	zweydeutig ſpitzig	}	17
ſtumpf	ſt.	gr. als W kl. . . .	zweydeutig ſtumpf	}	18
ſpitzig	ſt.	gr. als 2R—W; kl. . . .	zweydeutig ſpitzig	}	19
ſtumpf	ſp.	kl. . . . gr. . . .	zweydeutig ſtumpf	}	20

22. Weil AD = ad; AΔ = aδ; ſo iſt dieſer Bogen in den zweydeutigen Fällen (16. 21.) zweydeutig; auſerdem allemahl ſpitzig.

Lehrſätze zu Auflöſung der ſchiefen Dreyecke.

Wenn man 6; 7. F. auf des Dreyeckes BRD Grund das Perpendikel PA herabläſſt, ſo bekömmt man zwey rechtwinklichte Dreyecke BPA; DPA, denen dieſes Perpendikel gemein iſt. Alſo kann man zwiſchen dieſen Dreyecken Vergleichungen aus den Proportionen des 1. S. und ſeines 3. Zuſ. anſtellen, wenn man zwo ſolche Proportionen, die r und PA gemein haben, verbindet. Man muß acht geben, daß die Tangenten und Coſinus von den innern Winkeln der rechtwinklichten Dreyecke zu verſtehen ſind; wenn man aus ihren bejahenden und verneinenden Zeichen

chen Schlüsse machen will. Die Sinus bleiben hie beständig bejahend.

3. Satz.

r. ſPA = ſB. ſBP = ſD. ſDP (wenn man im 1. S. I nur D statt B schreibt;) also ſB : ſD = ſDP : ſBP.

4. Satz.

r. ŧPA = tPBA. ſBA = tPDA. ſDA (II) also rPBA : tPDA = ſDA : ſBA.

5. Satz.

cos PA : r (aus III) = cos BP : cos BA = cos DP : cos DA.

6. Satz.

In IIII; r : cos PA = ſBPA : cos PBA = ſDPA : cos PDA.

7. Satz.

Im V oder VIII wird, wenn man B und P verwechselt, r. tPA = BPA. tBP = cos DPA. tDP; also cos BPA : cos DPA = tDP : tBP.

8. Satz. Aufgabe.

Im Kugeldreyecke, APB, aus den drey Seiten den Winkel B zu finden.

Aufl. 1. Man nenne die drey Winkel des Dreyecks A, B; P; und die Seiten ihnen gegenüber BP = a, AP = b; AB = p.

2. K

2. K ist der Kugel Mittelpunct. Man fälle aus P; PQ; PN; senkrecht auf KA; KB; so ist für den Halbmesser der Kugel = 1; (Trig. 19. S. Anm.).

PN = sin a; KN = cos a;
PQ = sin b; KQ = cos b.

3. PM falle senkrecht auf die Ebene AKB; so sind MN, MQ; senkrecht auf KB; KA; (Geom. 46. S. 6. Zus.) also PNM = B; PQM = A; (Geom. 52. S. 4. Zus.).

4. Folglich PM = PN. sin B = sin a. sin B; NM = PN. cos B = sin a. cos B.

5. Im Dreyecke NKQ ist aus Trig. 20. S. 1. Zus. $NQ^2 = KQ^2 + KN^2 - 2\,KQ.\,KN.\cos QKN$,

Aber QKN = p; (1) also aus (2)
$NQ^2 = \cos b^2 + \cos a^2 - 2\cos b.\cos a.\cos p.$

6. Ferner in eben dem Dreyecke (5)
NQ: KQ = sin p: sin KNQ; also

sin KNQ oder (3) $\cos MNQ = \frac{\cos b.\ \sin p}{NQ}$

7. Nun im Dreyecke QNM; nach dem (5) angeführten Satze
$QM^2 = NQ^2 + NM^2 - 2\,NQ.\,NM.\cos MNQ;$
also aus (6)
$QM^2 = NQ^2 + NM^2 - 2\,NM\cos b.\ \sin p.$

8. Es ist aber auch $QM^2 = PQ^2 - PM^2$

9. Man setze beyde Werthe (8; 9;) gleich so ist 7
$PQ^2 - PM^2 = NQ^2 + NM^2 - 2NM.\cos b.\ \sin p.$

Da-

Daher

$PQ^2 - PM^2 + 2\,NM.\,\text{cos}\,b.\,\text{sin}\,p = NQ^2 + NM^2$

und

10. $2\,NM.\,\text{cos}\,b.\,\text{sin}\,p = NQ^2 + NM - PQ^2 + PM^2$

11. Nun ist $NM^2 + PM^2 = PN^2$

also hat man zur rechten Hand in (10) folgendes:

$NQ^2 = \text{cos}\,a^2 + \text{cos}\,b^2 - 2\,\text{cos}\,a.\,\text{cos}\,b.\,\text{cos}\,p$

$+ PN^2 = + \text{sin}\,a^2$

$- PQ^2 = - \text{sin}\,b^2$

12. Weil nun $-\text{sin}\,b^2 = -1 + \text{cos}\,b^2$; und $\text{cos}\,a^2 + \text{sin}\,a^2 = 1$; so wird der Ausdruck in (11)

$2.\,\text{cos}\,b.\,(\text{cos}\,b - \text{cos}\,a.\,\text{cos}\,p)$

Das ist was rechter Hand in (10) steht.

13. Linker Hand steht $2.\,\text{sin}\,a.\,\text{cos}\,B.\,\text{cos}\,b.\,\text{sin}\,p.$

14. Folglich auf beyden Seiten mit $2.\text{cos}\,b$ div.

$\text{sin}\,a.\,\text{sin}\,p.\,\text{cos}\,B = \text{cos}\,b - \text{cos}\,a.\,\text{cos}\,p$

15. Also $\text{cos}\,B = \dfrac{\text{cos}\,b - \text{cos}\,a.\,\text{cos}\,p}{\text{sin}\,a.\,\text{sin}\,p}$

16. So fände man des gesuchten Winkels Cosinus, wobey nur die Unbequemlichkeit ist daß man erst die Theile des Zählers einzeln finden, denn zusammen fügen, endlich den Bruch berechnen muß.

17. Man merkt die Regel nach der hie zu rechnen ist leicht, wenn man daran denkt, daß b die Seite ist die dem gesuchten Winkel gegenüber steht, die beyden andern schliessen ihn ein.

18. Der Winkel ist spitzig oder stumpf, nachdem der Zähler bejaht oder verneint ist.

19.

Digitized by Google

19. Man hat auch

$$\cos B = \frac{\cos b}{\sin a . \sin p} - \cot a . \cot p.$$

20. Imgleichen aus (15)

$$1 - \cos B = \frac{\sin a . \sin p + \cos a . \cos p - \cos b}{\sin a . \sin p.}$$

21. Der Zähler hievon (20) ist $\cos (a-p) - \cos b$ (Trig. 19. S. 1. Zuf.).

22. Es ist gleichgültig ob man der Seiten die den Winkel enschliessen ihren Unterschied $a-p$ oder $p-a$ nennen will, weil ein bejahter und ein verneinter Bogen einerley Cosinus haben.

23. Der Unterschied von zween Cosinussen wird allemahl leichter gefunden, als ihr Product. Und so wäre es schon merklich bequemer den Zähler in (21) zu berechnen, als den in (15). Aus $1 - \cos B$ aber hätte man $\cos B$ selbst ebenfalls.

24. Indessey kann man durch Trigon. 19. S. 12. Zuf. veranlasst werden, noch einen andern Ausdruck zu suchen. Man hat dorten

$$\cos (\alpha-\beta) - \cos (\alpha+\beta) = 2 . \sin \alpha . \sin \beta.$$

Man setze also hie $a-p = \alpha-\beta$

$b = \alpha+\beta$

$b+a-p = 2\alpha$

$b-(a-p) = 2\beta$

oder $\alpha = \frac{1}{2} . (b+(a-p))$

$\beta = \frac{1}{2} . (b-(a-p))$

Also

$$\cos (a-p) - \cos b = 2 . \sin \tfrac{1}{2} (b+(a-p)) \sin \tfrac{1}{2} (b-(a-p))$$

Digitized by Google

25. So läßt sich der Zähler (21) so ausdrukken, daß man ihn völlig durch die Logarithmen berechnen kann.

26. Und weil der Nenner (20) schon so beschaffen ist, daß man ihn völlig durch die Logarithmen berechnen kann, so ist der Bruch (20) nun so ausgedruckt daß man $1 - \cos B$ völlig durch Logarithmen berechnen kann.

27. Aber $1 - \cos B = 2 . \sin \frac{1}{2} B^2$ (Trig. 19. S. 7. Z.); also bekömmt man endlich folgendes:

$$\sin \tfrac{1}{2} B^2 = \frac{\sin \frac{1}{2}(b+a-p) . \sin \frac{1}{2}(b-(a-p))}{\sin a . \sin p}$$

28. In dieser Formel ist der Sinustotus $= 1$; Soll er also $= r$ seyn, und es bedeutet z. E. $\sin \frac{1}{2} B$ des Winkels $\frac{1}{2} B$ Sinus für den Halbmesser $= 1$; aber $\sin \text{tab} \frac{1}{2} B$ eben des Winkels Sinus für den Halbmesser r; so ist

$\sin \text{tab} \frac{1}{2} B = r . \sin \frac{1}{2} B$ (Trig. 19. S. Anm.).

Also $\frac{\sin \text{tab} \frac{1}{2} B}{r} = \sin \frac{1}{2} B$ und

$\frac{\sin \text{tab} \frac{1}{2} B^2}{r^2} = \sin \frac{1}{2} B^2$

So muß das was linker Hand in (27) steht geändert werden, wenn man statt 1; den Halbmesser der Tafeln brauchen will.

29. Eben so kommen rechter Hand, statt der Sinusse die zum Halbmesser 1 gehören, folgende:

Im Zähler

$$\frac{\sin \text{tab} \frac{1}{2}(b+a-p)}{r} \quad \frac{\sin \text{tab} \frac{1}{2} b-(a-p)}{r}$$

Im

Im Nenner

$$\frac{\sin\text{tab } a}{r} \cdot \frac{\sin\text{tab } p}{r}$$

Da heben sich die r im Zähler und Nenner auf, weil nähmlich der Factoren im Zähler so viel sind als im Nenner.

30. Man kann also gleich in der Formel (27) rechter Hand statt jedes Sinus für den Halbmesser = 1; seinen sin tab schreiben.

31. Was man solchergestalt bekömmt, ist der Quotient welcher herauskömmt, wenn man das Quadrat des Tafelsinus von $\frac{1}{2}B$ durch das Quadrat des Halbmessers dividirt (28).

32. Will man also das Quadrat dieses Tafelsinus selbst haben, so multiplicire man was (30) giebt, mit dem Quadrate des Halbmessers.

33. So kömmt nachstehende Formel, wo ich der Kürze wegen, durch sin; sogleich den Sinus der Tafeln andeute.

$$\sin\tfrac{1}{2}B^2 = \frac{\sin\frac{1}{2}(b+a-p).\sin\frac{1}{2}(b-(a-p))}{\sin a.\ \sin p}.\ r^2$$

9. Satz. Aufgabe.

Ein Kugeldreyeck s. F. in ein anderes zu verwandeln, dessen Seiten jenes Winkel, und die Winkel jenes Seiten in der Ordnung wie Seiten und Winkel einander in jenen gegenüber stunden, gleich sind.

Digitized by Google

Aufl. In dem Kreise, der auf BP und BD senkrecht steht (S. 52. S. 8. Z.) seyen F, G, die Pole der genannten Kreise, so daß FG dem Winkel B gleich ist (S. 52. S. 10. Z.). Noch sey H des Kreises PD Pol, daß FH = P so ist GH = D, wo nach Verschiedenheit der Fälle D den Winkel im gegebenen Dreyecke oder seinen Nebenwinkel bedeuten kann, und also doch allemahl GH mit dem Winkel des gegebenen Dreyecks sich sehr leicht vergleichen lässt. Ferner gehen BP, DB, und BP, DP, und BD, DP, durch die Pole von FG, von FH, von GH (50. S. 3. Z.) die also in B, P, D, seyn müssen; also ist wiederum mit der vorerwähnten Zweydeutigkeit des innern Winkels und Nebenwinkels FGH = BD; FGH = PD; HFG = PB; oder HFG ist das gesuchte Dreyeck, wo sich die Zweydeutigkeiten in jedem Falle aus den Umständen heben lassen. Die verschiedenen Fälle auseinander zu setzen, ist hie zu weitläuftig, da diese Frage in der Ausübung fast gar nicht vorkömmt. Vermöge des 8. S. liesse sich für jeden Winkel ein Ausdruck durch die Seiten finden. Das gäbe drey Gleichungen; nähmlich, nächst der des 8. S; cos P $= \frac{\varphi - \mu\pi}{mp}$ und cos A $= \frac{\mu - \varphi\pi}{fp}$; da man nun die Cosinus durch die Sinus ausdrucken kann, so lassen sich, wie die Algebra lehrt, die drey unbekannten Grössen, m, f, p, aus diesen drey Gleichungen, und folglich durch die Cosinus der

Win-

Digitized by Google

Winkel finden. Stevin Cosmogr. III. B. 44. S. giebt eine Regel, da man aber die Sinus selbst in der Rechnung braucht.

Umständlicher zeige ich diese Verwandelung astron. Abhandl. I. Samml. Abh. 45. Hie ist sie entbehrlich.

10. Satz.

Erzählung der möglichen Fragen von schiefwinklichten Dreyecken, und Anweisung, was für Fälle nachfolgender Tafel sie beantworten.

Gegeben		Gesucht	
α) Alle drey Seiten		Ein Winkel	11. Fall.
β) Alle drey Winkel		Eine Seite	12
γ) Zwo Seiten und ein W.			
I. Der eingeschlossene		die übrige Seite	9
		ein Winkel	10
II. Der einer gegebenen Seite entgegen steht		der W. der einer geg. S. entgegenst.	1
		der W. der zwischen die gegeb. S. eingeschl.	4
		die dritte Seite	3
δ) Zween W. u. eine S.			
I. Die eingeschlossene		ein Winkel	7
		eine Seite	8
II. Die einem W. entgegenstehende		eine Seite, die einem gegebenen Winkel entgegensteht	2
		anliegt	6
		der dritte W.	5

Digitized by Google

BP; B; P;	D	r: cof BP = tB: cot BPA r. 3. F. und 6. S. ſBPA: ſDBA = cof B: cof PDA	7
BP; B; P;	DP	r: cof BP = tB: cot BPA r. 3. F. und 7. S. cof DPA: cof BPA = tBP: tDP	8
BP; BD; B;	DP	r: cof B = tBP: tBA r. 4. F. und 5. S. cof BA: cof BP = cof DA: cof DP	9
BP; BD; B;	D	r: cof B = tBP: tBA r. 4. F. und 4. S. ſDA: ſBA = tPBA: tPDA	10
BP; BD; PD;	B	ſBP. ſBD: r^2 = $\int\frac{1}{2}[PD+(BP-BD)].\int\frac{1}{2}[PD-(BP-BD)]$: $(\int\frac{1}{2}B)^2$ 8. S.	11
B; P; D;	die Seiten.	aus 8. S. durch die Verwandelung des 9. S.	12

Digitized by Google

Gegeben	Gesucht	Proportionen	Fall
BP; PD; B	D	ſPD: ſB = ſBP: ſD aus 3. S.	1
BP; B; D;	PD	ſD: ſBP = ſB: ſPD 3. S.	2
BP; PD; B;	BD	r: cos B = tBP: tBA rechtw. 4. F. und 5. S. cos BP: cos BA = cos DP: cos DA	3
BP; PD; B;	P	r: cos BP = tB: cot BPA rechtw. 3. F. und 7. S. tDP: tBP = cos BPA: cos DPA	4
BP; B; D;	P	r: cos BP = tB: cot BPA rechtw. 3. F. und 6. S. cos PBA: ſBPA = cos PDA: ſDPA	5
BP; B; D;	BD	r: cos B = tBP: tBA r. 4. F. und 4. S. tPDA; tPBA = ſBA: ſDA	6

Digitized by Google

1. Anm. Die Zweydeutigkeiten, die hie vorkommen können, und ihre Entscheidungen sind folgende.

1. Fall. Der gesuchte Winkel stumpf oder spitzig? Entscheidet der 2. S. 16.

2. Fall. Die gesuchte Seite stumpf oder spitzig? Entscheidet 2. S. 21.

3. Fall. Fällt das Perpendikel innerhalb oder ausserhalb des Dreyecks? Entscheidet sich aus dem Winkel D (2. S. 2.) dessen Art man, ohne ihn genau zu berechnen, aus 2. S. 16. erkennt, weil die gegebenen Dinge hie wie im 1. Falle sind. Ist er zweydeutig, so bleibt die Entscheidung dieser Frage auch so.

4. Fall. Eben die Frage und eben die Antwort.

5. Fall. Lage des Perpendikels? Aus den gegebenen Winkeln zu finden (2. S. 2.) Art des Winkels DPA? Aus AD (1. S. 6. Z.) und die Art von AD aus (2. S. 22.).

6. Fall. Lage des Perpendikels wie 5. Fall. Art v. AD aus 2. S. 22.

7. Fall. Lage des Perpendikels giebt sich aus dem Winkel BPA den die erste Proportion ohne Zweydeutigkeit bestimmt, mit dem gegebenen BPD verglichen.

8. Fall. Eben die Frage, erhält eben die Antwort.

9. Fall. Eben die Frage beantwortet BA mit DB verglichen. Daraus sieht man ob BA gröſſer oder kleiner als DB ist; und also ob A näher

bey

Digitized by Google

bey oder weiter von B fällt als D wenn beyde A und D auf einer Seite von B liegen. Nun ist auch BPA gegeben. Daraus ob solcher stumpf oder spitzig ist: sieht man, ob D und A auf verschiedenen oder auf einer Seite von B liegen.

10. Fall. Eben die Frage und eben die Antwort.

11. Fall. Art des gesuchten Winkels? Aus 8. S. Zus.

2. Anm. Der Bar. Neper hat eine allgemeine Regel rechtwinklichte Kugeldreyecke aufzulösen erfunden, und Canon. mirif. log. Cap. 4. beschrieben. Der Freyh. v. Wolf ist auf eine andere gekommen, die er Elem. Trig. Sphaer. §. 100. 108. zeigt, und das. §. 134. auf schiefwinklichte erstreckt. Man sehe auch Pingré, la Tr. Spher. reduite à quatre analogies Mem. de l'Ac. des Sc. 1756. p. 301. Die Scharfsinnigkeit, mit welcher diese Mathematikverständigen das Allgemeine aus so mancherley Fällen abgesondert haben, verdienet gerühmt zu werden; aber die Regeln selbst haben meiner Einsicht nach keinen grossen Nutzen in der Ausübung. Sie fassen nehmlich blos die vorhin gegebenen Proportionen in gewisse allgemeine Ausdrückungen zusammen, aus denen man für jeden Fall die gehörige Proportion herleiten kann. Heisst dieses nicht: man hat bey ihrem Gebrauche mehr zu denken, als wenn man die Proportion, die diesem Falle zugehört, in der Tafel aufsuchet? Aber dem, der diese Tafel nicht bey der Hand hätte, könnten sie doch brauchbar seyn? Nur ist dieser Vortheil nicht groß; denn man kann diese Tafel leicht den Tafeln der Sinusse und Tangenten einverleiben; und so lange man diese nicht auswendig gelernt hat, muß man doch zu Berechnung der Dreyecke ein Buch bey der Hand haben. Nützlicher sind analytische Formeln,

dergl. der Hr. v. Oppel in seiner Analysi Triangulor. Hr. Euler Mem. de l'Acad. de Pr. 1753. p. 223. Maier Comm. Ac. Petrop. T. V. p. 25. u. a. geben. Dergleichen enthält in meinen astronomischen Abhandlungen, I. Sammlung, die II. Abhandl. auch der II. Samml. V. Abhandl.

Die Perspectiv.

1. Erfahrung. Wenn man etwas Undurchsichtiges in einer geraden Linie zwischen das Auge und eine Sache, die man sieht, hält, so kann man die Sache nicht mehr sehen.

2. Zus. Also empfindet man die Sache durch Lichtstrahlen, die von der Sache als gerade Linien an das Auge kommen.

3. Erf. Von entlegenen Sachen kann man, blos auf ihrem Anblicke nicht sagen, ob sie alle in gleicher Weite von uns, oder welche uns näher sind, z. E. der Mond sieht uns so weit entlegen aus als die Sterne; er verdeckt uns aber öfters Sterne, und ist folglich näher und zwar unendlich vielmahl, wie die Sternkunst weiset.

4. Zus. Wenn vom Puncte M ein Lichtstrahl MO 1. Fig. in das Auge O kömmt, so wird das Auge eben so gerührt werden, als wenn nur ein Strahl IO vom Puncte I in der Linie MO käme.

5. Zus. Zwischen einen Gegenstand LM und das Auge O; werde eine durchsichtige Ebene N ⏥ np; die Tafel gesetzt; welche die Lichtstrahlen MO,

MO, LO, in l; K; durchschneiden, so wird das Auge auf einerley Art gerührt werden, ob es die Strahlen von M, oder von I, K, den perspectivischen Abbildungen oder Projectionen der Puncte M, L, bekömmt.

6. Aufgabe. Auf eine Ebene, die ich den Horizont oder Boden nennen will, und dergleichen hie die Ebene des Papiers seyn mag; stehe die Tafel (5) Q ≙ my senkrecht, über der Linie N ≙ der Fundamentallinie; die Lage des Auges O, und des Punctes M im Boden sind gegeben, man sucht l (5).

Aufl. Die Lage des Auges zu bestimmen, lasse man auf den Boden ein Perpendikel herab, das also gegeben ist, und OS = a seyn mag: Ferner von S ein Perpendikel auf die Fundamentallinie; ST = d; welches auf der Tafel senkrecht stehet (G. 47. S. 3. Z.). Eine Ebene durch TS und SO gelegt, steht also auf der Tafel senkrecht (G. 47. S.) und ihr Durchschnitt mit der Tafel ist auf den Boden senkrecht (G. 48. S.) folglich mit OS gleichlaufend (G. 46. S.) und ein Perpendikel aus O auf diesen Durchschnitt = ST (G. 12. S. 5. Z.) und auf die Tafel senkrecht (G. 47. S. 1. Z.). Man fälle von O auf die Tafel das Loth OR; welches mit ST parallel ist (G. 46. S.) also sind STR; TRO, rechte Winkel (G. 12. S. 2. Z.) und weil TSO auch einer ist (G. 2. Th. 1. Erkl.) so ist im Viereck SORT; SOR auch einer (G. 13. S. 6. Z) also

RT

RT mit OS parallel (G. 12. S.) und auf den Boden senkrecht (G. 46. S.) und OR, die Weite des Auges von der Tafel (G. 46. S. 5. Z.) = ST = d; Man ziehe ferner MN = δ auf die Fundamentallinie und folglich auch auf die Tafel senkrecht, die Ebene MSO steht auf den Boden senkrecht, und folglich auch ihr Durchschnitt mit der Tafel, IW = x, der also mit OS gleichlaufend ist. Folglich ist MS: MW = OS: IW; Es ist aber MW: MN = WS: ST folglich MW: MN = MS: MN + ST (Ar. V. 34.) oder MW: MS = δ: d + δ folglich d + δ: δ = a: x oder $x = \frac{a\delta}{d+\delta}$.

Ferner erhellt, daß aus der Lage des Auges und des Punctes M, die Linie TN = n gegeben ist. Da nun TW: TS = WN: MN so ist auch TW: TS = TN: TS + MN oder wenn TW b heißt, $b = \frac{nd}{d+\delta}$ durch TW und WI aber ist der Punct I gegeben.

7. Zus. L sey ein Punct senkrecht über M, in der Höhe LM = α; K seine Projection; Nun befindet sich L in der Ebene durch die Parallelen LM; OS; (G. 46. S.) das ist in der Ebene MSO; folglich ist LO und K auch in dieser Ebene; (G. 2. Th. Grundsz.) also K in dieser Ebene Durchschnitte mit der Tafel; d. i. in der verlängerten WI. Folglich ist OM: OI = LM: IK.

Man

Man nenne diese IK; die perspectivische Höhe = z. Nun ist OM: OI = SM: SW; aber MW: δ = SW: d also SM: SW = δ + d: d = α: z oder $z = \frac{\alpha d}{\delta + d}$.

Also $WK = x + z = \frac{a\delta + \alpha d}{d + \delta}$.

8. Zus. $NT - WT = NW = \frac{n\delta}{d + \delta}$ also NW: IW = n: a = NT: TR; also sind N; I; R; in einer geraden Linie.

9. Zus. NI: IR = NW: TW = δ: d.

10. Zus. $NI = \frac{NR.\delta}{d + \delta}$ und $NR = \sqrt{(a^2 + n^2)}$.

11. Aufg. Durch Linien, die nur auf der Tafel HQ z. F. gezogen werden; des Punctes M (6) Projection zu finden.

Aufl. Die Puncte H, Q, N, R, bedeuten hie und in 1. F. einerley; R heisst der Augenpunct, Man ziehe durch R eine Linie GRg mit der Fundamentallinie parallel, welche die Horizontallinie heisse; Auf ihr nehme man RG = Rg = d so heissen G, g, Distanzpuncte.

Man ziehe RN; Ferner nehme man NE = δ und ziehe GE, so ist der Durchschnitt I, die Projection, welche man eben so findet, wenn man Ne = δ nimmt und ge zieht.

Bew.

Digitized by Google

Bew. Die Dreyecke RIG; NIE sind ähnlich; also NI: IR = NE: RG = δ: d; da nun die Linien NR; 2. F. 1. F. einerley sind, so müssen auch die Puncte I einerley seyn, die beyde nach einerley Verhältniß hie und (9) theilen. Die Aehnlichkeit der Dreyecke RIg; NIe giebt eben das für den andern Distanzpunct.

12. Anm. Man nimmt zweene Distanzpuncte, damit man δ von N aus auf welche Seite es am bequemsten ist, tragen kann.

13. Lehrs. Die Projection einer geraden Linie ist auch eine gerade Linie.

Bew. Durch die gerade Linie und das Auge geht eine Ebene, in der sich alle gerade Linien befinden müssen, die von jedem Puncte der gegebenen geraden Linie nach dem Auge gezogen werden; (G. 2. Th. Grundf.) also können diese Linien die Tafel nirgends schneiden, als wo die Tafel von dieser Ebene geschnitten wird; d. i. in einer geraden Linie (G. 2. Th. 2. Erkl. Anm.).

14. Zus. Wenn eine krumme Linie in einer Ebene liegt, die durch das Auge geht, so ist ihre Projection auch eine gerade Linie.

15. Zus. Eine geradelinichte Figur, die auf dem Boden liegt, perspectivisch abzubilden, darf man nur der Projection ihre Winkelpuncte suchen, und solche mit geraden Linien zusammenziehen.

16. Ex. Wenn ein Quadrat, wie ABCD 3. F. auf dem Boden hinter der Tafel so läge, daß

Digitized by Google

daß die Entfernungen seiner Winkelpuncte von der Fundamentallinie den Linien $A\alpha$; $B\beta$; $C\alpha$, $D\delta$, gleich wären, und die Fundamentallinie in den Puncten α, β, δ schnitten; so nehme man $\alpha 1 = A\alpha$; $\beta 2 = B\beta$; $\alpha 3 = C\alpha$; $\delta 4 = D\delta$; so geben sich der Punete A, B, C, D, Projectionen a, b, c, d, nach (11) und abcd ist des Quadrates Abbildung.

17. Anm. Die Beschaffenheit und Lage der Figuren giebt zuweilen hie Vortheile, daß man nicht alle Projectionen unmittelbar suchen darf. Hie z. E. hat das Auge einerley Lage gegen E und D; hat man also b gefunden, so giebt sich d wenn man $Rd = Rb$ nimmt, oder durch b mit der Fundamentallinie parallel bis an Rd zieht. Dieser Vortheil würde wegfallen, wenn eine Ebene auf den Boden lothrecht nach des Quadrates Diagonale gesetzt, nicht durch das Auge geht, oder wenn das Quadrat vom Auge schief angesehen wird. Eben so, liegt hie die Diagonale BD mit der Fundamentallinie parallel; und ist der Diagonale AC gleich; daher $\beta\alpha = \frac{1}{2}\ \beta\delta = \frac{1}{2}$ BD $= \frac{1}{2}$ AC und $B\beta = A\alpha + \beta\alpha$ daher in der Fundamentallinie 1. und 2. zusammen fallen. In der Fig. ist das Auge dreymahl so weit über den Boden erhoben als die Entfernung des Punctes A von der Fundamentallinie beträgt, und Höhe und Entfernung des Auges sind der Seite des Quadrates AB gleich. Daraus daß ABCD auf dem Boden, und abcd auf der Tafel dem Auge einerley aussehen, wird die Kunst begreiflich, verzogene Bilder zu zeichnen, die bey einer gewissen Stellung des Auges ordentlich aussehen; (anamorphosis optica).

18. Anm. Dieses Verfahren erfordert den Grundriß ABCD unter die Fundamentallinie zu legen. Er ist aber nur wegen der Puncte α, β, δ, und der Entfer-

fernungen der Puncte AB, C, D, von der Fundamentallinie nöthig. Weiß man diese Puncte und Entfernungen, so kann man nach 11. ohne den Grundriß verfahren.

19. Anm. Eine krumme Linie, die auf dem Boden liegt, abzubilden, kann man in ihr so viel Puncte man will annehmen, und derselben Projectionen suchen, durch die man alsdenn eine krumme Linie, die sie zusammenhenkt, mit freyer Hand ziehen muß; 4. F. Aus der krummen Linie, die man abbilden soll, die krumme Linie des Bildes selbst zu finden, lehrt die Algebra.

Im Exempel ist die Lage des Auges so angenommen, daß es von einer Verticalfläche durch den Durchmesser AC; um die Grösse dieses Durchmessers entfernt; eben so hoch über den Boden erhoben und um drey Halbmesser von der Tafel entfernt ist.

20. Aufg. Ueber dem Puncte I 5. F. als eines Punctes M 1. F. Projection, in der Tafel die perspectivische Höhe (7) aufzurichten, die der wirklichen Höhe LM 1. F. zugehört.

Auflös. N 5. F. und 1. F. bedeuten einerley Puncte. Man ziehe 5. F. NQ = ML 1. F. senkrecht auf die Fundamentallinie; Ferner RQ; und IK mit NQ parallel, so wird IK die gesuchte perspectivische Höhe, oder K die Projection von L 1. F. seyn.

Bew. Es soll IK = z (7) seyn; also = $\frac{\alpha d}{d+\delta}$ das ist = $\frac{NQ\ IR}{NR}$ (9).

21. Anm. Oder auch so: über der Fundamentallinie richte man aus einem willkührlichen Puncte nq = LM

= LM i. F. senkrecht auf, und ziehe an ihm Enden
us einem willkührlichen Puncte der Horizontallinie
'n, Vq; Eine Linie durch den gegebenen Punct I mit
er Fundamentallinie gleichlaufend gezogen, schneide
'n in i; und eine Parallele durch i mit qn, schneide
'q in k; endlich eine Parallele durch k mit der Fun-
amentallinie; RQ in K. Denn solchergestalt wird
'n: Vi = RN: RI (G. 29. S.) also qn: ik = (Vn:
'i =) RN: RI; folglich ist ik die perspectivische Hö-
e, wenn nq = NQ der wirklichen ist; und dieser
c wird IK gleich gemacht und auf I gesetzt.

Wenn Puncte, über verschiedenen Puncten des
odens gleich hoch, aber so stehen, daß die Projec-
onen der Puncte, über denen sie stehen, nicht alle
i eine einzige gerade Linie RN fallen, so ist dieses
erfahren, die Verwirrung vieler Linien zu vermei-
en, bequemer.

22. Ex. Eine Allee von Bäumen oder eine
eihe von Säulen, die man alle gleich hoch an-
immt, abzubilden.

Man setze die eine Reihe der Bäume oder
äulen sey in der Linie NM i. F. die andere in
ner andern solchen Linie und das Auge stehe
itten davor; So ist TN = n die halbe Brei-
e der Allee, oder die halbe Entfernung jedes
Baums von dem ihm gerade gegenüberstehen-
en; die Entfernung jeden Baums von dem
ächsten in seiner Reihe sey = e; der erste aber
ehe gleich an der Tafel, so ist, wenn M die
Stelle des (m + 1) Baums bedeutet MN =
= me; woraus man, ohne den Grundriß wirk-
ch unter die Fundamentallinie zu legen, die Pro-

jectionen der Stelle jeden Baums (18) und seine perspectivische Höhe (20) findet.

Es sey $a=6$; $d=60=5.12$; $n=10$; $e=12$.

So ist (10) $NR=\sqrt{136}=2\sqrt{34}$ (Arithm. II. C. 15.) $=11,6619038$. Ferner $\frac{\delta}{d+\delta}$

$=\frac{12.m}{12.5+12.m}=\frac{m}{m+5}$; daher $NI=\frac{m}{m+5}.NR$

Für $m=0$ ist dieses $=0$;

Für jeden andern Werth von m, berechne man was in NR multiplicirt wird, so hat man leicht NI.

Es sey z. E. $m=4$; so ist $NI=\frac{4}{9}.NR=\frac{46,6476152}{9}=5,1830683$;

Begreiflich hat man nicht nöthig die Rechnung so scharf zu führen.

So gehören zusammen

m	1	2	3	4	5
$\frac{m}{m+5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{10}$
NI	1,9436	3,3319	4,3732	5,1830	5,8309

Die Ausziehung der Wurzel kann man sich durch Logarithmen ersparen, und den gefundenen,

Logarithmen, als einen beständigen brauchen. Nähmlich

log 136 = 2,1335389
halb = log NR = 1,0667694

Die Logarithmen würden besonders dienen, wenn der Factor bey NR, Zahlen hätte mit denen sich nicht bequem multipliciren oder dividiren liesse.

Es sey m = 32; also $\frac{m}{m+5} = \frac{32}{37}$

log NR = 1,0667694
log 32 = 1,5051500
2,5719194
log 37 = 1,5682017
log NI = 1,0037177
NI = 10,085

Die 6. Figur, zeigt die Stellen der ersten sechs Bäume, für m = 0 . . . . 5.

TN = Tn = 10 ist von einem Maaßstabe genommen, wo einer dieser zehn Theile, wiederum in zehn getheilt war. So ist TR = 6; und die Zeichnung giebt NR ohne daß man etwa die Irrationalzahl vom Maaßstabe abzunehmen nöthig hätte. Nun sind N1; N2; . . . N6 die vorhin berechneten Werthe von NI so genau sie sich von diesem Maaßstabe nehmen lassen; Eben die Werthe sind auf nR genommen, oder durch Parallelen mit Nn, ist nR so getheilt worden wie NR.

Digitized by Google

Die Höhe $= \alpha = NQ = nq$ ist des Platzes wegen $= 15$ gesetzt worden, da die Deutlichkeit einen kleinern Maaßstab verbot.

23. Erklär. Wenn die Weite des Auges von der Tafel, in Vergleichung der übrigen Grössen, unendlich groß angenommen wird, so heisst die Projection orthographisch.

24. Zus. Hie wird EG 2. F. (11) mit RG gleichlaufend (G. 12. S. 12. Z.) also fällt I in die Fundamentallinie, und weil es zugleich in RN liegen muß, in N; oder es ist $NI = o$ wie aus 10 erhellt, wo hie $NI = \frac{NR \cdot \delta}{\infty}$ wird. *

25. Anm. Auch wird $NI = o$ wenn der Gegenstand gleich an der Tafel liegt, das Auge mag stehen wo es will, denn da ist $\delta = o$.

26. Zus. Für die orthographische Projection, wie für den Fall (25) ist $z = \alpha$ (7).

27. Anm. Man bedienet sich der orthographischen Projection häufig, bey Aufrissen in der Baukunst, Landcharten; in der Astronomie; u. s. w.

28. Exempel. Ein Auge steht in der verlängerten Axe ID der Kugel Geom. 126. F. unendlich weit vom Pole D, man verlangt dieser Kugel orthographische Projection auf eine Tafel, die sie im Pole D berühret.

Jeder Punct der Kugel wie E, befindet sich zugleich in einem Kreise, der durch beyde Pole gehet wie DEIMD; einem Mittagskreise und in einem Parallelkreise wie EM; da aber alle Mittagskreise einander in der Axe schneiden (G. 49.

19. St. f. Alſo befindet ſich das Auge in aller Mittagskreiſe Ebenen; und ihre Projectionen ſind alſo gerade Linien (14) durch die Projection des Pols, d. i. durch den Pol ſelbſt (25), deren Winkel mit einander den Winkeln der Mittagskreiſe gleich ſind (G. 52. S. 4. Zuſ.) Die Projection jedes Punctes in einem Parallelkreiſe aber befindet ſich da, wo ein Perpendikel von dieſem Puncte auf die Tafel trifft (26) alſo iſt die Projection jeden Parallelkreiſes, ein Kreis um den Pol, deſſen Halbmeſſer des Parallelkreiſes Halbmeſſer gleich iſt. Jeder Parallelkreis nähmlich kann als die Grundfläche eines ſenkrechten Cylinders angeſehen werden, in deſſen Axe ſich das Auge unendlich entfernt befindet; Alle Seiten dieſes Cylinders (G. 53. S. 8. Z.) gehen alſo nach dem Auge zu, und ihre Durchſchnitte mit der Ebene der Tafel ſind Projectionen der zugehörigen Puncte in der Grundfläche; Aber die Tafel ſtehet auf dieſe Axe ſenkrecht, und ihre Durchſchnitte mit allen Seiten liegen alle in dem Umfange eines Kreiſes, welcher der Grundfläche gleich iſt (G. 53. S. 9. Z.). So entſteht die Projection der Kugel 7. Fig. wo eun; gwn; nDg; die Projectionen der Parallelkreiſe EM; GN, und des halben Mittagskreiſes NDG ſind.

29. Anm. Iſt das Auge in der Axe, in einer endlichen Entfernung, als in O Geom. 126. F. ſo befindet es ſich allemahl in der Spitze eines Kegels, deſſen Grundfläche ein Parallelkreis iſt; alſo iſt noch die Projection jedes Parallelkreiſes EM ein Kreis (G.

61. S. 4. 3.) aber ihr Halbmesser verhält sich zum Halbmesser QE; wie OD: OQ; die Projectionen der Mittagskreise bleiben wie vorhin. Diese Projection der Kugel kann nicht ihre Hälfte vorstellen, sondern nur so viel innerhalb des Winkels enthalten ist, den die Tangente aus O an der Kugel gröſstem Kreis mit der Axe macht.

Vom Schatten.

80. Aufg. Wenn ein Körper von einem leuchtenden Puncte beschienen wird, den Schatten zu bestimmen.

Aufl. Man ziehe durch den leuchtenden Punct, und alle Puncte in den Gränzen des Körpers gerade Linien, soviel von diesen nirgends in den Körper selbst hineingehen, die verlängere man auf der Seite des Körpers, die vom Lichte abgewandt ist, so werden sie zwischen sich einen geometrischen körperlichen Raum einschliessen, welcher des vorgegebenen Körpers Schatten seyn wird, in den nähmlich kein Licht kömmt (2).

31. Zus. Wenn dieser Raum mit einer Ebene durchschnitten wird, so giebt sich des Körpers Schatten auf dieser Ebene.

32. Zus. Den Schatten der Linie BM 8. F. zu finden, die auf dem Boden, in welchem B ist, senkrecht steht, lasse man von L ein Loth LA auf diesen Boden, und verlängere AB; LM, bis sie zusammenstossen, so ist BO der Schatten. Hieraus versteht man, wie der Schatten 9. F. gefunden wird.

33.

Digitized by Google

33. Zus. Giebt es zween leuchtende Punkte, wie L, l; 10. §. so kömmt zu den Raum Bo gerade zu gar kein Licht, in oO aber von o nach O zu immer mehr und mehr, bis über O beyde Lichter den Boden bescheinen. Also muß Bo dunkler als oO seyn, und der Schatten von o nach O zu sich nach und nach verlieren. Man heißt dieses den Halbschatten.

34. Anm. Weil die Körper, auf die Licht fällt, wieder Licht nach allen Seiten von sich senden, so kömmt auch in BO 8. §. Licht nicht gerade zu von L, sondern von den Körpern um Bo herum, die L bescheinet. Daher ist ein Schatten nie so vollkommen, daß Dinge, die in ihm liegen, ganz unsichtbar würden, und jeder Schatten auch von einem einzigen Lichte verliert sich an seinen Gränzen nach und nach; denn Schatten ist eigentlich umgränzte Finsterniß.

35. Zus. In einem leuchtenden Körper von merklicher Grösse läßt sich eine Menge leuchtender Punkte ringsherum an seinen Gränzen annehmen, und so wird der Schatten bey Ihm nach Anleitung (33) bestimmt.

36. Anm. Die Handgriffe zu schattiren, und andere Regeln perspectivischer Abbildungen, die sich nicht blos durch geometrische Zeichnungen bewerkstelligen lassen, gehören nicht zu meiner gegenwärtigen Absicht, und müssen aus umständlichern Abhandlungen dieser Kunst erlernet werden, die man nach gegenwärtiger Vorbereitung leichter und besser wird gebrauchen lernen. Ich habe hie blos das Geometrische der Perspectiv vortragen wollen, so weit es sich aus den vorhergehenden Anfangsgründen herleiten läßt. Weiter habe ich es mit Zuziehung der Algebra in einer 1752. zu Leipzig herausgegebenen Schrift Perspe-

Sitzer & projectionum theoria generalis analytica; und nach dieser im Anhange des vollständigen Lehrbegriffs der Optik ausgeführt. Ich will noch als einen Anhang die Zeichnung eines Würfels in einer gewissen Lage beyfügen. Vor etwa zweyhundert Jahren hat man sich sehr mit perspectivischen Abbildungen besonders der regulären Körper in verschiedenen Stellungen belustiget; bey den Kupferstichen von dieser Art aber, die ich besitze, sind die Regeln sie zu zeichnen nicht angegeben. Wer die Arten die ordentlichen Körper in die Kugel zu beschreiben aus dem Pappus gelernt, und andere dergleichen Betrachtungen angestellt hat, wird sich bey dergleichen Arbeiten leichte selbst helfen können, wenn er Lust hat, und für nützlich befindet, sie vorzunehmen. Man findet Regeln von solchen Zeichnungen, aber ohne Beweise, in der Perspective Pratique par un religieux de la comp. de Jesus (Paris 1663. 2 Quartbände) seconde Partie Traité V: Rembold hat das meiste von dem ersten Theile dieses Buches unter dem Titel: vollständige Anweisung zur Perspectiv-Reißkunst zu Augspurg 1710. in 4to deutsch herausgegeben. Ich nenne nur noch: J. H. Lambert freye Perspective, Zürich 1759. Die zweyte Ausg. 1774; an sich unverändert, aber mit einem zweyten Theile vermehrt, den man auch besonders haben konnte.

37. Aufg. Wenn eines Würfels 11. Fig. Diagonale HA auf dem Boden senkrecht steht, zu finden, wo die Lothe von seinen übrigen Ecken auf den Boden fallen; davon B; G; F; mit A in einer Seitenfläche C; D; E; mit H in der gegenüberstehenden sind. So daß des Würfels Flächen ABCD; DAFE; EDCH; und EFGH; HGBC; BGFA sind;

sind; die drey lezten stehen den drey ersten gegenüber.

Auflöſ. I. Die Seite des Würfels heisse der Kürze wegen = 1: so ist die Diagonale einer Seitenfläche wie $AE = \sqrt{(AFq + AEq)} = \sqrt{2}$ und die Diagonale des Würfels $AH = \sqrt{(AEq + EHq)} = \sqrt{3}$.

II. Die Seiten des Würfels HE; HC; HG; stehen auf der Seitenflächen Diagonalen AE; AC; AG; senkrecht, also ist Tang $AHE = \frac{AE}{EH} = \sqrt{2} = \frac{AC}{HC} =$ Tang $AHC = \frac{AG}{AH} =$ Tang AHG; Ferner ist wegen der parallelen Seiten des Würfels AHE = HAB; AHC = HAF; AHG = HAD; Also macht die Diagonale, mit den drey Seiten, die in H; und mit den dreyen, die in A zusammenstoſſen, sechs Winkel von einerley Grösse. Jedes Secante ist $\sqrt{3}$ (Trig. 4. Erkl. 5. Zus.) und daher der Sinus $= \frac{\text{Tang}}{\text{Sec}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Man lasse 14. Figur GI auf HA senkrecht, so ist $HI = \frac{GH.HG}{AH} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ und $GI = \frac{AG.GH}{AH} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Nähme man C, oder E statt G, so käme HI, eben wie vorhin und CI = GI = EI; also

steht HA auf der Ebene durch EGC senkrecht und geht durch I, den Mittelpunct dieses Kreises, der um das gleichseitige Dreyeck EGC dessen Seite $= \sqrt{2}$ ist, beschrieben wird.

III. Vollkommen auf eben die Art zeigt sich, daß HA auch auf der Ebene durch BFD senkrecht stehet, und durch den Mittelpunct des Kreises um das gleichseitige Dreyeck BFD geht; dessen Seiten mit den Seiten des obigen einerley sind. Es sey nähmlich DK auf HA senkrecht, so ist

$AK = \frac{1}{\sqrt{3}}$ und $KD = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = GI.$

IIII. Die Ebenen dieser beyden Kreise sind also mit dem Boden parallel, (G. 46. S. 9. Z.) und H, A, ihre Pole, (G. 49. S. 9. Z.) und die Lothe von des Würfels Ecken auf den Boden, sind mit der Diagonale gleichlaufend (G. 46. S.).

V. Es sey Ee 12. F. ein solches Loth. Weil sich IE in der Ebene durch die beyden Parallelen IA; Ee (G. 2. Th. Grundſ.) und auch in der Ebene durch EGC (III) befindet, so ist sie beyder Ebenen Durchschnitt; wie Ae vollkommen nach dieser Art zu schliessen, der Durchschnitt des Bodens mit der Ebene durch die Parallelen, folglich sind IE; Ae parallel (G. 2. Th. 2. Erkl. Zuſ.) und gleich (G. 12. S. 3. Z.) also $Ae = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ (III).

VI.

Digitized by Google

VI. Weil die Schlüsse (VI) von jeder Ecke des Würfels gelten; so seyen 13. Fig.; e; c; g; die drey Puncte, in denen die Lothe von E; C; G; den Boden treffen; Sie werden also in dem Umfange eines Kreises liegen, der mit Ae = IE beschrieben ist (III) und aus (G. 2. Th. 2. Erkl. Zus.) ist jede Seite des Dreyecks auf dem Boden wie ec der darüberstehenden Seite des obern Dreyecks, wie EC, parallel; und gleich (G. 12. S. 3. Z.) folglich das Dreyeck auf dem Boden dem obern gleich und ähnlich (G. 46. S. 2. Z.) also gleichseitig (III).

VII. Wenn f; d; b; 13. Fig. Puncte sind, in denen die Lothe von F; D; B; auf den Boden treffen, so liegen solche in eben dem vorigen um A mit Ae beschriebenen Kreise, und geben darinnen wiederum ein gleichseitiges Dreyeck (II. VI).

VIII. Wo Anfangs ein Punct wie e liegen soll, das kömmt auf die Stellung des Würfels an, den man um HA als um eine Axe nach Gefallen drehen kann; Ist die Lage des Punctes e angenommen, so geben sich c, g, leicht dadurch, aber f, d, b, sind auch bestimmt, und nun muß noch gelehrt werden, wie man sie findet.

VIIII. Eine Ebene durch HA und AD ist auf den Boden senkrecht (G. 47. S.) und in ihr befindet sich der Neigungswinkel der Linie DA gegen

Digitized by Google

gen den Boden (S. daſ. und 2. Th. 1. Erkl.) der alſo mit DAH = 90 Gr. iſt. Man ſehe die 14. Fig. wo AQ des Bodens Durchſchnitt mit der ſenkrechten Ebene durch AH und AD iſt, HG befindet ſich, weil ſie mit AD parallel geht, in einer Ebene durch D, A, H; d. i. in der nur genannten ſenkrechten Ebene.

X. Alſo iſt der Neigungswinkel DAQ = AHD deſſen Sinus = $\frac{AD}{AH} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ und der Coſinus = ſin HAD = $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$; Es iſt aber $\frac{\text{ſin } 30\,\text{Gr.}}{\text{coſin } 30\,\text{Gr.}}$ = Tang 30 Gr. (Trig. 4. Erkl. 3. Zuſ.) = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (Trig. 2. Erkl. 1. Zuſ.) alſo ſin DAQ = Tang 30 Gr. die Zahl, durch welche Tang 30 Gr. in den Tafeln ausgedruckt wird; fällt zwiſchen die Sinuſſe von 35 Gr. 15 M. und 35 Gr. 16 M; zwiſchen dieſe beyden Winkel fällt alſo der Winkel DAQ; oder nach Gellibrands Tafeln, zwiſchen 35 Gr. 15 M. 36 Sec; und 36 Gr.

XI. Alle Seiten des Würfels AD, EF, GH, BC, ſind parallel, und haben alſo (S. 53. S.) die nur gefundene Neigung (S. 47. S. 4. Z.).

XII.

Digitized by Google

XII. EF sey eine solche Seite 15. Fig. und begegne dem Boden in P die Perpendikel auf dem Boden Ee, Ef, sind in einer Ebene (G. 46. S.) in der sich auch EFP befindet, (G. 2. Th. Grundſ.) folglich ist P im Durchschnitte dieſer Ebene mit dem Boden ef; d. i. efP ist eine gerade Linie (G. 2. Th. 2. Erkl. Anm.).

XIII. Also cof P: sin P $= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} : \frac{1}{\sqrt{3}}$ (XI) $= \sqrt{2} : 1 =$ Pf: fF $=$ Pe: eE $=$ FQ: QE, wenn FQ mit Pe parallel geht. Folglich QE. $\sqrt{2} =$ FQ also FE $= 1 =$ QE $\sqrt{3}$ oder QE $= \frac{1}{\sqrt{3}}$ und daher FQ $=$ fc $= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} =$ Ae (V) also eAf $=$ 60 Gr. (G. 23. Satz 5. Zuſ.).

XIIII. Trägt man also in den Kreis 13. F. die nur gefundene Sehne ef vom angenommenen Puncte e (VIII) oder nimmt man den Bogen ef $=$ 60 Gr; so giebt sich f; und alles übrige (VIII).

XV. Aus (III) ist AH $-$ HI $= \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}$ $= \frac{3-1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} =$ Ee (V).

XVI.

Digitized by Google

XVI. $Ee - E\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (XIII) $= Ff = \frac{1}{2} Ee$.

XVII. Zeichnung des verlangten.

Mit dem Halbmesser $Ae = lE$ (V) beschreibe man einen Kreis; und nehme in solchem einen Punct e nach Gefallen an; von diesem Puncte an beschreibe man in den Kreis ein gleichseitiges Dreyeck ecg (G. 23. S. Anm.) auch nehme man eine Sehne $ef = eA$; (XIII) und beschreibe von f an ein anderes gleichseitiges Dreyeck in eben den Kreis fdb; so sind die Winkelpuncte der beyden Dreyecke die gesuchten (VI. VIII).

XVIII. Die drey Ecken des Würfels E; G; C, stehen über e; g; c; in der (XV) angewiesenen Höhe, und die drey Ecken B; F; D; über b; f; d; in der (XVI) angewiesenen.

XVIIII. Zum Grundrisse braucht man keine Linie weiter zu finden als Ae; und zu den Höhen nur noch Ee. Blos geometrisch findet man sie folgendergestalt: Man nenne die Seite des Würfels $HE = a$; die Diagonale seiner Grundfläche $HD = b = a\sqrt{2}$; die Diagonale des Würfels $c = a\sqrt{3}$; welche Ausdrückungen aus (I) werden, wenn man nun a nennt, was dort 1 hieß. Die letzten beyden Linien lassen sich aus der ersten durch Zeichnung finden (G. 15. S. 2. Zus.

Digitized by Google

2. Zuſ. und 60. S. 12. Z.). Weil nun $\sqrt{2} = \frac{b}{a}$ und $\sqrt{3} = \frac{c}{a}$ ſo iſt $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. a oder (V) $IE = \frac{b}{c}$. a Man findet alſo Ae; wenn man zu c; b; a; die vierte Proportionallinie ſuchet (S. 30. S.). Ferner iſt $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a}{c}$ und aus XVII; $Ff = \frac{1}{\sqrt{3}}$. $a = \frac{a^2}{c}$; Alſo die dritte Proportionallinie (S. 20. S. 11. Z.) zu c; a; und verdoppelt = Ee.

XX. Durch Rechnung laſſen ſich die nöthigen Linien folgender maſſen finden. Man ſetze a = 10000;

$l2$	=	0,3010300
$l3$	=	0,4771212 So iſt
$l\frac{2}{3}$	=	−0,1760912
$\frac{1}{2}l\frac{2}{3}$	=	$-0,0880456 = l\sqrt{\frac{2}{3}} = l\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$
la	=	+4,
$l\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$	=	3,9119546 = lAe
also Ae	=	8165

Ferner

Ferner $la = 4,$

$l\sqrt{3} = 0,2385606$

$la.\frac{1}{\sqrt{3}} = 3,7614394 = \bar{I}Ff$

also $Ff = 5773 +$ und $Ee = 11546 +$

Diese Rechnung wird in den meisten Fällen die erforderte Schärfe vollkommen geben, weil die Seite des Würfels selten so groß seyn wird, daß kleinere Theile beträchtlich wären. Sonst könnte man sie mit gröſsern Logarithmen auch bis auf Hunderttausendtheile, und mit den Zahlen selbst, so weit man wollte, treiben. Ist die Seite des Würfels willkührlich, so kann man für sie die Länge eines Maaßstabes, der tausend oder hundert gleiche Theile hat, annehmen, und so diese Rechnung bequem brauchen.

XXI. Das bisher gefundene, kann für unzählige perspectivische Abbildungen immer eben des Würfels einerley bleiben, wenn man nur die Stellung des Auges ändert (11. 20.). Die Arbeiten alle, durch welche eine solche Abbildung, wie in der 11. F. entstanden ist, darzustellen, verstattete die Gröſse der Tafel nicht,

und

Digitized by Google

und wenn ich die Figur verkleinert hätte, wäre sie unkenntlich geworden. Es ist auch hie nichts zu beobachten, das jemand, der den vorhin gegebenen Regeln folgen will, nicht selbst finden könnte. Die 11. Fig. ist von einer gleich grossen Zeichnung abgetragen worden, für die ich die Entfernung des Auges von der Tafel der Diagonallinie des Würfels gleich, und die Höhe des Auges über den Boden $= \frac{7}{4}$ dieser Diagonale angenommen habe. Die Seite des Würfels ist $=$ AZ 12. Fig. woraus man die wahre Diagonale suchen muß (XVIIII) deren perspectivische Abbildung HA der 11. Fig. ist; das Auge ist so gestellt, wie die 11. und 13. F. zusammen zeigen, wenn man den Augenpunct in die verlängerte Linie Aα AH in der gehörigen Höhe $= \frac{7}{4}$ c über die Fundamentallinie δεαΦγ setzt. Es befindet sich nähmlich das Auge in einer lothrechten Fläche durch den Durchmesser des Grundrisses, der mit ec und fb gleichlaufend ist, und der Würfel ist so gedrehet (VIII) daß diese drey Parallelen auf die Fundamentallinie senkrecht stehen. Der Halbmesser des Grundrisses 13. F. aber ist des Platzes wegen zu klein angenommen

worden. Ae 12. F. ſtellt ſeine eigentliche Gröſſe für dieſe Zeichnung nach V; und eben daſelbſt AI die Höhe Ee (XV) vor. Nachdem man der Puncte des Grundriſſes Projectionen nach 11. gefunden hat; iſt es am bequemſten, der Ecken des Würfels perſpectiviſche Höhen nach 12. zu beſtimmen.

Digitized by Google

Anhang.

Zwo Tafeln mit ihrer Erklärung.

Digitized by Google

Digitized by Google

Erklärung
und
Gebrauch der Tafel
von
Groschen und Pfennigen in Decimaltheilen des Thalers.

Auf den Thaler sind 24 Groschen gerechnet.

Ich brauche diese Eintheilung des Thalers weil sie in Deutschland allgemeiner ist, als die nach 36 oder Mariengroschen, die man auch bey jedesmaliger Bedürfniß leicht in jene verwandelt.

Groschen und Pfennige bequem in Decimaltheilen des Thalers, in eine Tafel zu bringen dienen folgende Bemerkungen.

Da jede Menge dieser kleinen Einheiten, höchstens nur Zehntheile des Thalers beträgt, so erspart man jedesmahl die o welche die Stelle der Einheit ausfüllen soll, wenn man gleich anzeigt die höchste Ziser des Gliedes der Tafel bedeute Zehntheile.

Weil m Gr $= \frac{m}{24}$ Thl; so lassen sie sich durch eine aufhörende Reihe von Decimalbrüchen angeben, wenn m ein Vielfaches der 3 ist, oder $m = 3n$.

Digitized by Google

Ist $m = 3n + 1$ so sind m Gr $= \frac{n}{8} + \frac{1}{24}$ das giebt nebst einigen höhern Zifern, eine unendliche Reihe von 6. Für $m = 3n + 2$ sind m gr $= \frac{n}{8} + \frac{1}{12}$ durch eine unendliche Reihe von 3 gegeben. Man setze also in die Tafel nur die höchste dieser 6 oder 3; und deute ihre Wiederhohlung durch Tüpfelchen nach ihr an. Wer die Tafel braucht fügt solcher Zifern noch soviel er will bey, immer in niedrigern Stellen.

So bedeuten in nachfolgender Tafel, die Glieder

1 Gr. = 0,04166 u. s. w. ohne Ende
5 = 0,20833 u. s. w. ohne Ende
6 = 0,25 völlig genau.

Ein Pfennig $= \frac{1}{288} =$ 0,00347222 . . . ohne Ende.

Multiplicirt man irgend ein Paar der niedrigsten dieser Zifern 22 mit einer geraden Zahl; 2; 4; 6; 8; 10; so kömmt zum Producte 44; 88; 132; 176; 220;

Also werden 2; 4; 6; 8; 10 Pfennige durch Decimalbrüche ausgedruckt bey den die Zifern, 4; 8; 3; 7; 2; zuletzt ohne Ende fortgehn.

Werden 22 mit einer ungeraden Zahl 1; 3; 5; 7; 9; 11; multiplicirt, so sind die Producte 22; 66; 110; 154; 198; 242; Also, 1; 3; 5; 7; 9; 11 Pf. durch Decimalbrüche ausgedruckt bey den die Zifern 2; 6; 1; 5; 9; 4; ohne Ende fortgehn.

So ist in folgender Tafel

2 Pf = 0,006944 u. s. f. ohne Ende
8 Pf = 0,0277 u. s. f. ohne Ende

Bey $\frac{1}{3}$ Pf kommen die Zifern 740 ohne Ende wieder.

In

In Decimaltheilen des Thalers

	Groſchen			Pfennige	
1	0416...	13	5416...	1	003472....
2	083...	14	583...	2	00694....
3	125	15	625	3	010416...
4	16....	16	60...	4	0138....
5	2083...	17	7083..	5	017361...
6	25	18	75	6	02083...
7	2916...	19	7916...	7	024305...
8	3.....	20	83...	8	027...
9	375	21	875	9	031249....
10	416....	22	916....	10	03472...
11	4583...	23	9583...	11	038194...
12	5			½	0017361...
				⅓	0011574 0 u.ſ.w.

Exempel.

I) Ein Capital von 29374 Thl 20 gr 11 pf; trägt 5 Procent Zinsen. Nachdem es ein Jahr gestanden hat, werden darauf 10647 Thl 21 gr 6 pf bezahlt. Wieviel bleibt noch Schuld?

II) Zinsen zu 5 Procent berechnet man durch Division mit 20, das heisst: Jede Ziser halbirt aber ihre Hälfte einer Stelle niedriger gesetzt.

III) Zu den Thalern = 10647.

21 gr	=	0,875
6 pf	=	0,02083333
bezahlt wird	=	10647,89583333

IV) Zu den Thalern = 29374.

20 gr	=	0,8333333
11 pf	=	0,0381944
Capital	=	29374,8715277
Zinsen	=	1468,7435763
Schuld am Ende des Jahres	=	30843,6151040
das Bezahlte abgezogen, bleibt R	=	20195,7192707
17 gr	=	0,7083333
		0,0109374
3 pf	=	0,0104166
		0,0005208

Also R = 20195 Thl. 17 gr. 3 pf. und darüber noch nicht $\frac{1}{4}$ pf.

V.

V. Würde jährlich gleichviel zu Verminderung des Capitals bezahlt, so setzte man die Rechnung folgendergestalt fort:

Zu R, in den Decimalbrüchen ausgedruckt addirte man seine Zinsen, und zöge davon wiederum (III) ab. Das liesse einen zweyten Rest den man R2 nennen könnte, und die Gr. u. Pf. die er enthält wenn man sie zu wissen verlangt auch auf die vorige Art finden.

VI. So lässt sich die Rechnung leicht so weit als nöthig fortführen.

VII. Zur Uebung, zeige ich an, daß am Ende des dritten Jahres der Rest R3 = 437,59408 seyn wird, die Decimalbrüche betragen 14 gr. 3,09 pf.

VIII. Das Exempel ist aus einer Rechnung über allmählige Tilgung einer landschaftlichen Schuld. Das Capital oder der jedesmalige Rest, war in Thl. Gr. Pf. angegeben, davon die jährlichen Zinsen auch so berechnet, dazu addirt, und durch Abzug des auch in Thl. Gr. Pf. bezahlten, der folgende Rest gefunden.

IX. Begreiflich ist so lange die Abzahlung fortdaurrt, nichts daran gelegen jedesmahl die Groschen und Pfennige zu wissen; Nur beym Abschlusse der Rechnung druckt man dadurch den Zustand der Sache den Interessenten verständlich

Digitized by Google

aus. Also wäre die Rechnung die ich bey (IV) als Exempel der Tafel gebe, da, und bey den folgenden Resten nicht nöthig, bis am Ende.

X. Die Decimaltheile sind viel weiter angegeben, als ganze Pfennige, und selbst Theile des Pfennigs sie erfodern, denn was kleiner als ein Tausendtheil des Thalers ist, beträgt noch nicht $\frac{1}{2}$ Pfennig, so ist die Decimalrechnung selbst schärfer als die gemeine, bey der man Theile des Pfennigs wegläßt, oder statt ihrer einen ganzen nimmt. Auch stimmt im Exempel, meine Rechnung genau mit der überein die mir mitgetheilt ward.

Logarithmen zur Kreisrechnung.

Von der Zahl P (Geom. 44. S. oder wie sie Geom. 64. S. 4. Zus. genannt wird π) braucht man häufig Vielfache, Vielfache des Quotienten den 1 mit ihr dividirt giebt, Quadrat und Cubikwurzeln aus ihr u. s. w. Will man dergleichen Rechnungen sehr scharf führen, so macht man sich für jede aus erwähnter Zahl hergeleitete ein Einmahleins, wie Geom. 66. S. 3. Zus. schon ist erwähnt worden.

Das ist nöthig wenn sehr grosse Kreise vorkommen; z. E. wenn man aus dem Umfange eines grössten Kreises auf der Erde = 5400 Meilen, in einzelnen Meilen richtig berechnen wollte.

Der-

Digitized by Google

Dergleichen Einmahleinse giebt der königl. preussische Oberbaurath Hr. Schulz in seinem Taschenbuche, 1. Heft (Berlin 1782.) am Ende.

In mehrern Anwendungen kommen Kreise vor bey denen die Logarithmen zulängliche Schärfe gewähren, und so werden die welche ich hie mittheile brauchbar seyn. Nachstehende beyde Exempel sind aus Hr. Schulzens Taschenbuche 438 und 398 Seite. Er findet durch die Multiplication mit seinen Einmahleinsen, eben die Zahlen.

Einer Kugel Innhalt = 536 Cubikzoll; Also (Geom. 66. S. 8. Z.) ihres Durchmessers Würfel = $\frac{3216}{P}$

$\log 3216 = 3,5073160$
$\log (1 : P) = 0,5028501 - 1$

$\log d = 3,0101661$
$\log d = 1,0033887$

Giebt den Durchmesser = 10,078 Zoll.

Ein Kreis soll 793 Quadratfuß halten. (Geom. 44. S. 7. Z.).

$\frac{1}{2} \log 793 = 1,4496366$
$\log \sqrt{P} = 0,2485749$

$\log \frac{1}{2} d = 1,2010617$

Giebt

Giebt durch Proportionaltheile $\frac{1}{2}$ d = 15, 8877 und den Durchmesser = 31, 7754.

Von 1 Grade, 1 Min. 1 Sec. stehn die Logarithmen vorhin auf der 321 Seite.

Digitized by Google

Logarithmen von

P	0,4971499	$= \log 180°$
$2P$	0,7981799	$= \log 360°$
P^2	0,9942997	
$\sqrt{P}$	0,2485749	
$\frac{1}{P}$	0,5028501 — 1	
$4P$	1,0992099	
$\frac{1}{4P}$	0,9007901 — 2	
$\frac{1}{2}P$	0,1961199	$= \log 90°$
$\frac{1}{4}P$	0,8950899 — 1	$= \log 45°$
$\frac{1}{3}P$	0,0200286	$= \log 60°$
$\frac{1}{6}P$	0,7189986 — 1	$= \log 30°$

Digitized by Google

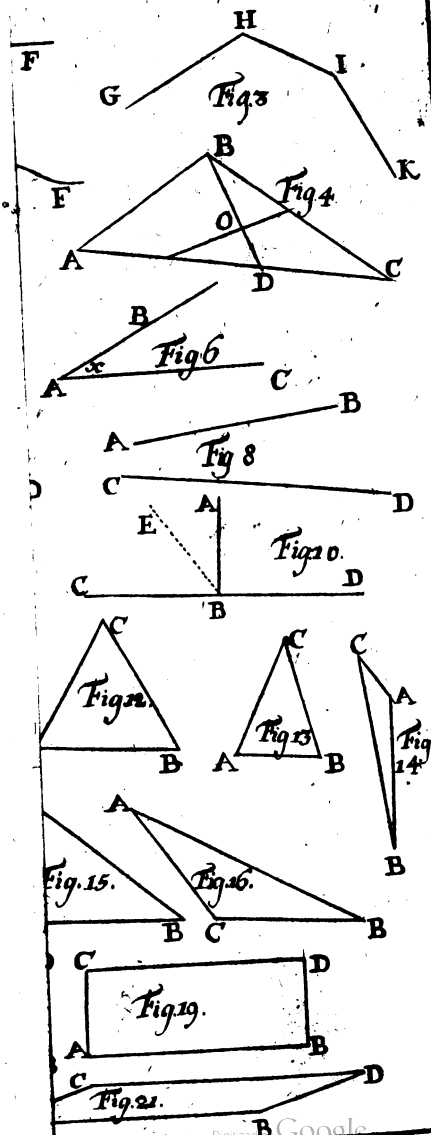
Druckfehler.

515. S. 3. Zuſ. III; Beym gleichſchenklichten Dreyecke, hat der Ausdruck des Halbmeſſers zum Zähler a^2, nicht $a^2 c$.

Nachricht für den Buchbinder.

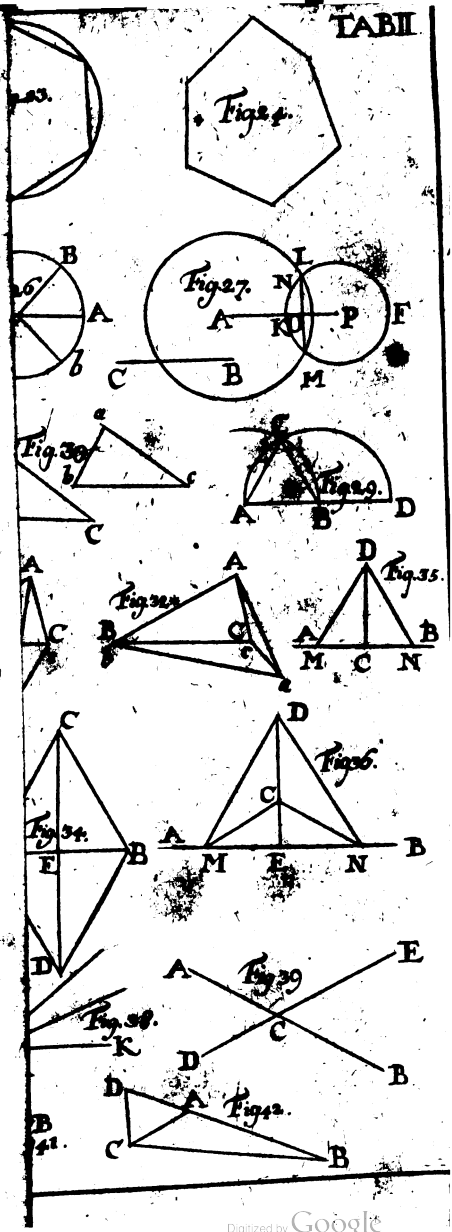
Da die 12. Kupfertafeln am füglichſten am Ende des Buchs zu binden ſind, ſo wird der Buchbinder bey jeglicher derſelben ſo viel Papier anſetzen, daß ſie bey dem Leſen ganz herausgeſchlagen werden könne.

Digitized by Google



Digitized by Google

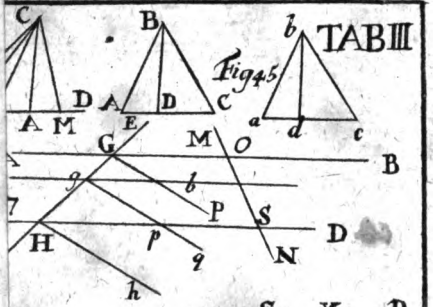
Digitized by Google

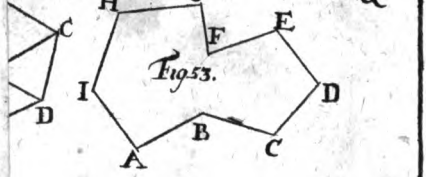


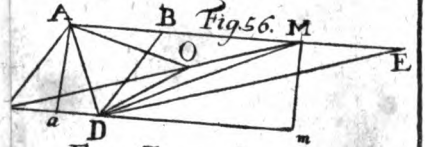
Digitized by Google

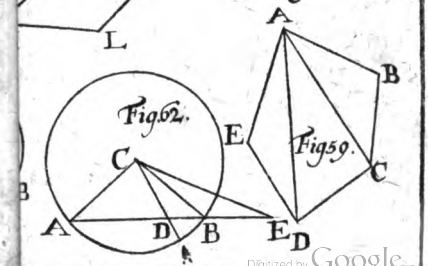
Digitized by Google

TAB III







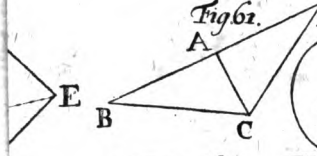


Digitized by Google

Digitized by Google

TAB. IIII.

Fig. 61.



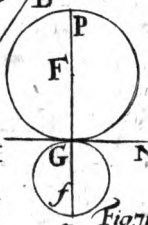


Fig. 71.

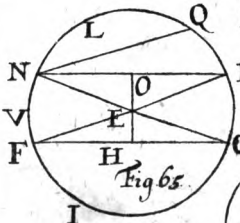
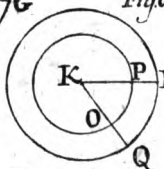


Fig. 65.

Fig. 68.



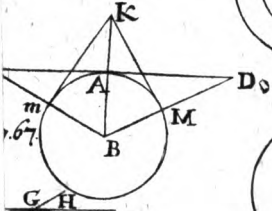


Fig. 72.

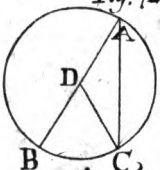


Fig. 73.

Fig. 74.

Fig. 75.

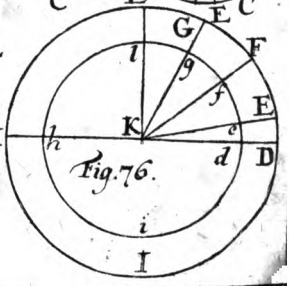
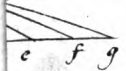


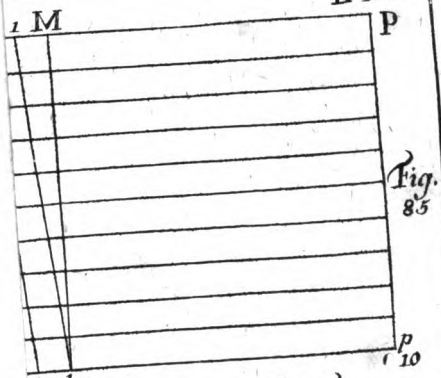
Fig. 76.

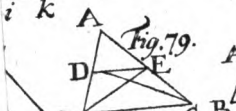
Fig. 77.*

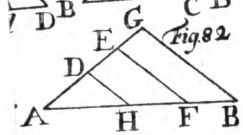


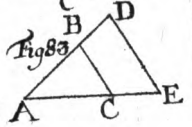
Digitized by Google

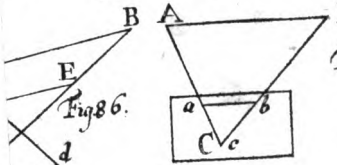
Digitized by Google

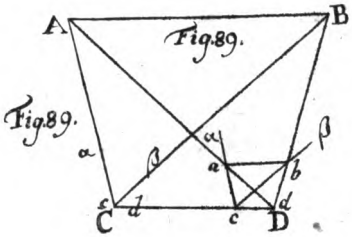








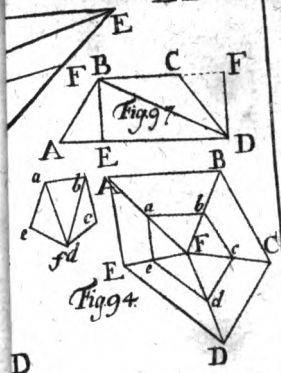




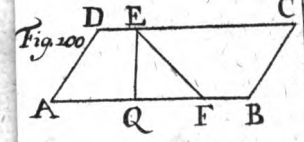
Digitized by Google

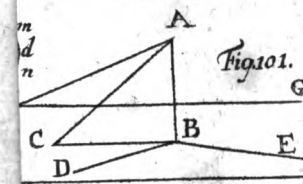
Digitized by Google

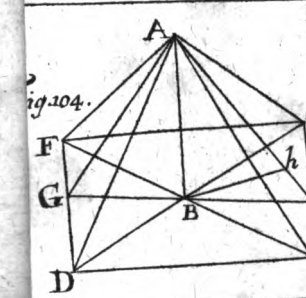
TAB. VI.


E
F B C F
A E D
Fig. 97.
a b
e c
f d
A B
a b
F c C
E e
d
D
Fig. 94.

D
P O Q
Fig. 96.
M N S

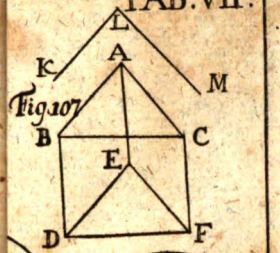

D E C
Fig. 100.
A Q F B


A
Fig. 101.
G
C B E
D

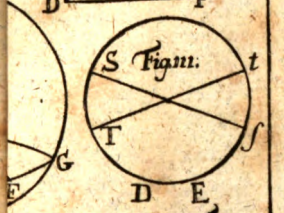

I
A
C
F
h
G H
B
D E

Digitized by Google

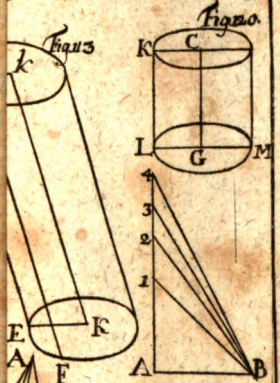
TAB. VII.



Figur 07



Figur.



Figur 10

Figur 3

Digitized by Google

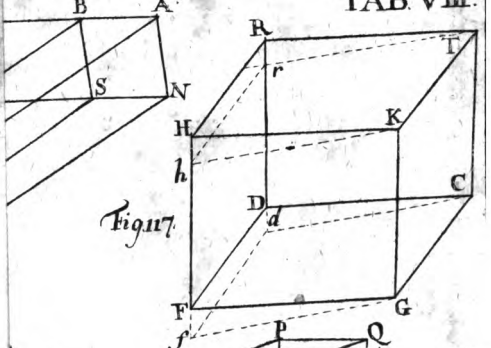


Fig. 117.

Fig. 116.

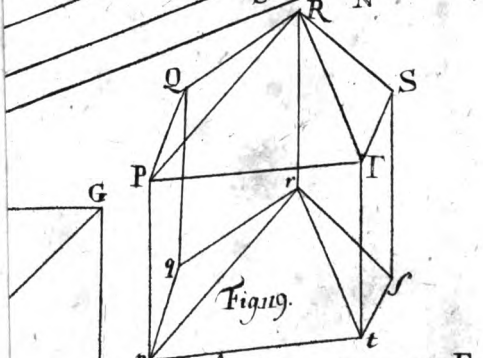


Fig. 119.

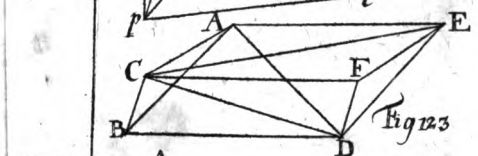
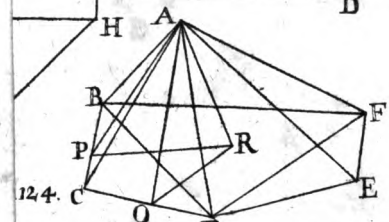


Fig. 123.



124.

Digitized by Google

Digitized by Google

TAB. VIIII

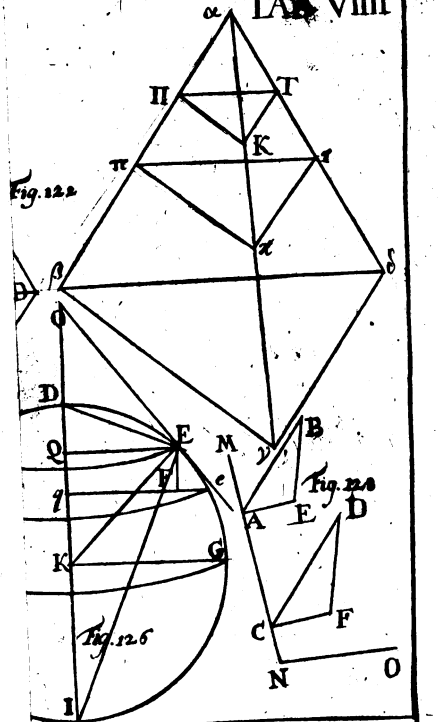
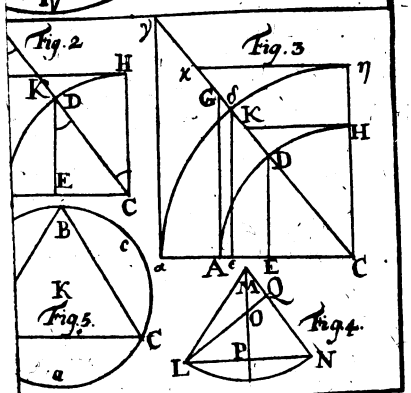


Fig. 126

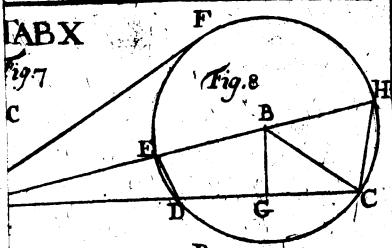
Fig. 128

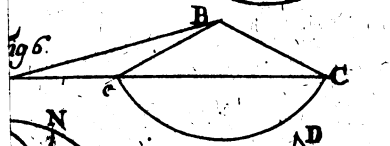


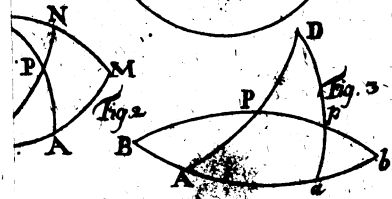
Digitized by Google

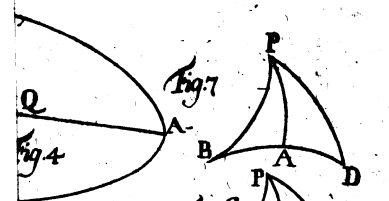
Digitized by Google

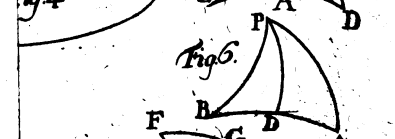
TABX

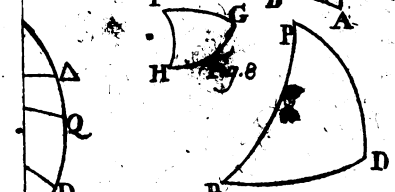








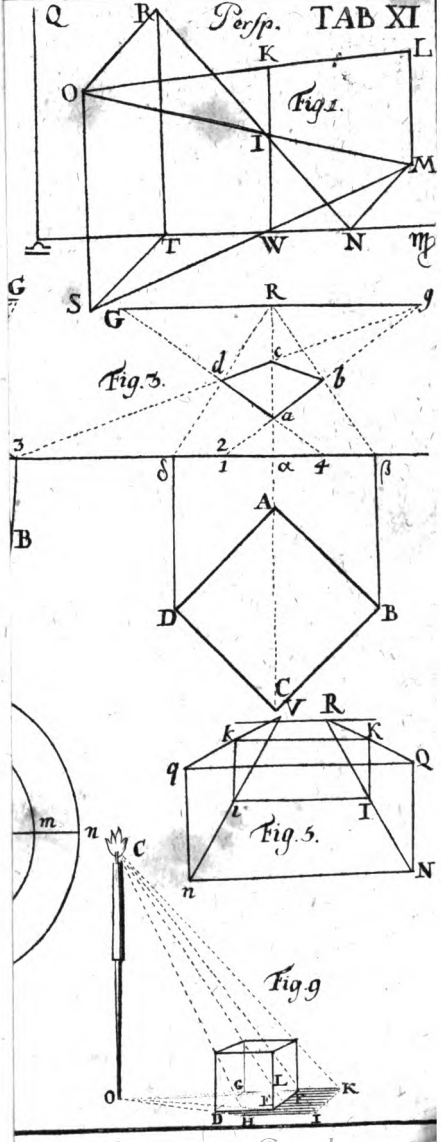




Digitized by Google

Digitized by Google

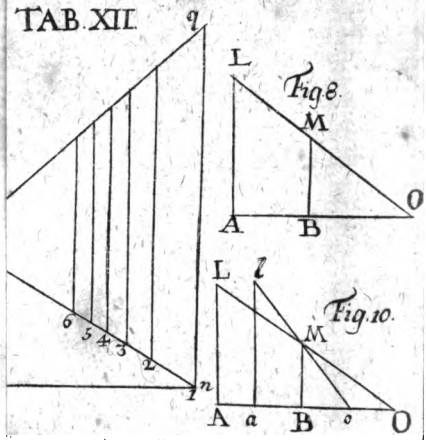
Persp. TAB XI

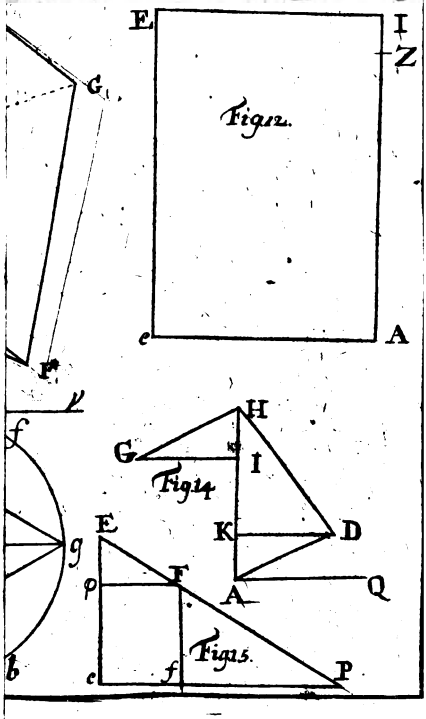


Digitized by Google

Digitized by Google

TAB. XII.





Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

XX VII 87

XXXXXX (6 Bde) VII 87

Digitized by Google